This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Teutsch-
Redender Euclides.

Oder:

Acht Bücher,
Von denen Anfängen
Der

Reck-Kunst,

Auf eine neue und gantz leichte Art,

Zum Nutzen

Allen Generalen, Ingeniern, Natur- und Warheit-Kündigern, Bau-Meistern, Künstlern ꝛc.

In Teutscher Sprach eingerichtet und bewiesen;

Durch

Ant. Ernst Burckh. von Pirckenstein.

Wien in Oesterreich.
In Verlegung Peter Conrad Monaths.
Im Jahr 1744.

Vorrede des Authors

History of Science
Harrassowitz
4-29-2.7
9831

An den

Günstigen Leser.

OB zwar bißhero viel Euclidische Bücher, in verschiedenen Sprachen und Beweiß-Arten beschrieben, heraus gekommen sind; so glaube doch, daß deren noch keines also beschaffen, als gegenwärtiges, anzutreffen seyn werde: dann man sich hierinnen nicht wenig beflissen hat, aller Orten die mittelmässige Kürtze und Deutlichkeit deren sonst schweren Vorgaben, nebst denen gehörigen Figuren und beqvemen Druck, also einzurichten, daß nicht allein der Gelehrte, sondern auch derjenige, welcher nur lesen kan, diese Eucli-

dische Vorgaben leichtlich fassen, und innerhalb kurtzer Zeit verstehen mag.

Von denen funffzehen Büchern, so Euclides von denen Anfängen der Meß-Kunst geschrieben, habe ich nur acht Bücher, als nöthige, für dißmahl heraus gegeben, die übrigen, weilen sie von einer gantz andern Materie, nemlich von der abgesonderten Grösse, handeln, habe biß auf eine gelegene Zeit mit Fleiß zuruck halten wollen.

Nun wünsche ich nichts mehr, als nur allein, daß unsere Teutsche auch hierinnen der Ausländischen Völcker Moden nachfolgen, und die Mathematische Wissenschafften, gleich ihnen, erlernen, und zu Nutzen ihres Herrns und Vatterlandes anwenden möchten, nicht zweiffelnd, daß hierdurch unsere Kriegs- und Friedens-Künste und Wissenschafften viel auf eine höhere Staffel folgends gelangen und uns glückseeliger machen sollten.

Das

Das

Erſte Buch

Des Teutſch-redenden

Euclides.

Ausleg- oder Erklärung der Zeichen.

∠		Ein Winckel und Ecke.
=		Parallel- oder gleich weit lauffende Linien.
⊥		Perpendicular, oder Bleyrechte Linie
⊓		Gleich oder Gleichheit, oder, iſt gleich.
⌐		Iſt gröſſer, länger.
⌐		Iſt kleiner, kürtzer.
+	bedeutet	Mehr, mit, oder Zuſammenſetzung mit einander.
−		Weniger, ohne, oder Abzug.
×		Vermehrung, Multiplication.
△		Triangel, Drey-Eck, dreyſeitige Figur.
□		Quadrat, gleich vierſeitige Figur, Vier-Eck.
▭		Parallelogramm, Winckelrechte ablange Vierung.
⊟		Cubus, Würffel, und auch ein Parallelepipedum.

Zu einem Beyſpiel.

Man ſolte ſchreiben, der Winckel A. iſt gleich dem ∠ B. und die Linie C. D. ſeye Parallel der Linie E. F. ſo ſetzt man bloß:

Der ∠ A. iſt ⊓ dem ∠ B. und C. D. iſt = E. F.

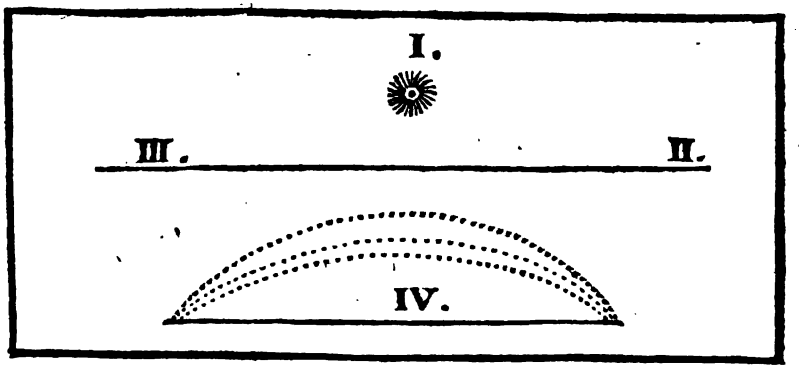
Item das Parallelogramm iſt gröſſer als der Triangel F G H.

Viel kleiner aber, als das Quadrat M N. ſo ſtehet es alſo:

Das ▭ iſt ⌐, als der △ F G H, viel ⌐ aber, als das □ M N.

Letzlich der Winckel A ſambt denen Winckeln B, und C, und D. iſt gleich dem Winckel E. ſambt dem Winckel F. ſtehet alſo geſchrieben

Der ∠ A + B + C + D + E iſt ⊓ dem ∠ E + F.



Wort-Erklärungen.

I.

DEr Punct iſt ein Tüpffelein, das in ſeiner Gröſſe unzertheilig iſt, oder in welchem wir allhier keine Theile zu betrachten haben. Fig. I.

Gleich wie Eins aller Zahlen, alſo iſt der Punct ein Anfang aller Gröſſe.

II.

Eine Linie, oder Strich, iſt eine Länge ohne Breite. Fig. II.

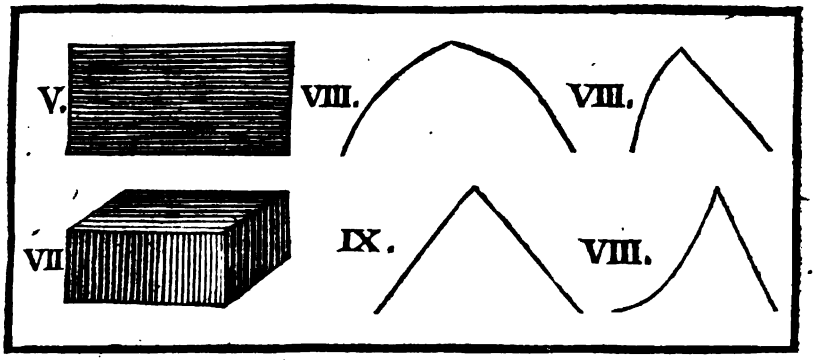
III.

Die äuſſerſte Theile der Linien ſind Puncten. Fig. III.

Dann eine Linie nimmt ihren Anfang von einem Punct, und endet ſich an einem Punct.

IV.

Eine gerade Linie iſt, welche Schnur-eben, zwiſchen zwey Puncten liegt: oder eine gerade Linie iſt die kürtzeſte unter allen, welche aus einem Punct in einen andern mögen gezogen werden. Fig. IV.



V.

Eine Ebene oder Fläche iſt, welche nur allein eine Breite und Länge, nicht aber eine Dicke hat. Fig. V.

VI.

Das äuſſerſte einer Fläche ſind Linien.

VII.

Eine gerade Fläche iſt, welche Schnur-eben zwiſchen ihren Linien ligt. Iſt gleich einem wohl polierten Marmorſtein. Fig. VII.

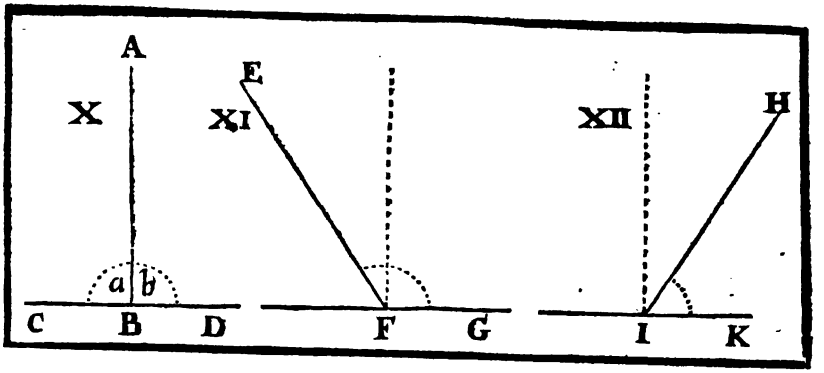
VIII.

Ein flacher Winckel iſt, wann auf einer geraden Fläche zwo Linien mit dem einen Ende einander berühren, und nicht Schnur-gerad nach einander liegen, ſondern ſo, daß eine Linie ſich gegen die andere neiget. Fig. VIII.

IX.

Wann diejenige Linien, welche dieſen Winckel machen, gerad ſind, ſo wird er ein geradlinichter Winckel genannt. Fig. IX.

Die zwo Linien, welche den Winckel machen, werden Seiten genannt. Und die Spitze, oder der Punct, allwo ſie zuſammen ſtoſſen, der Winckel oder das Eck.



X.

Wan eine gerade Linie (A.B.) auf einer andern geraden Linie (C.D.) ſtehet, und die zwey Winckel (a und b) welche ſie mit ihrem Anrühren verurſachet, beyde einander gleich machet: ſo werden beyde Rechte Winckel genannt, und diejenige gerade Linie (A.B.) ſo auf der andern (C.D.) ſtehet, wird die Bleyrechte, oder Perpendicular derjenigen (C.D.) auff welcher ſie ſtehet, geheiſſen. Fig. X.

XI.

Ein ſtumpffer Winckel iſt, welcher gröſſer als ein rechter Winckel iſt, gleich wie E. F. G. Fig. XI.

XII.

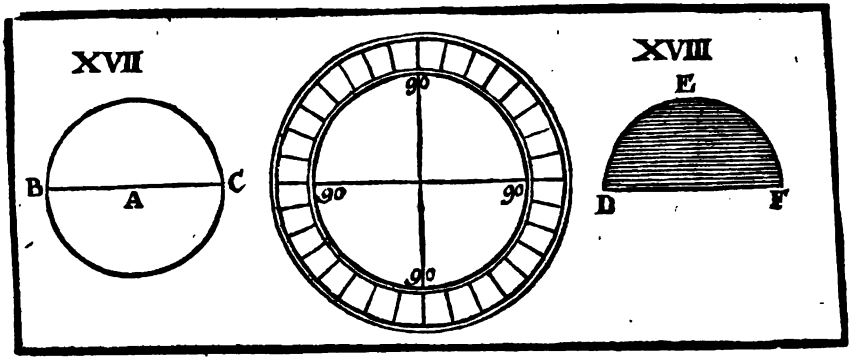
Ein ſpitziger Winckel iſt, welcher kleiner als ein rechter Winckel iſt, gleich wie H. I. K. Fig. XII.

XIII.

Das äuſſerſte, oder Rand, in Latein Terminus, iſt eines jeden Dings letztes Ende.

XIV.

Ein Figur iſt, welche von einem oder mehr Ränden eingeſchloſſen iſt.



XV.

Der Circkel iſt eine flache Figur, mit einer einigen Linie umgeben, welche der Umbkreiß, Circumferenz, oder Peripheria genannt wird; Wenn man in dieſe aus einem gewiſſen Puncte, welcher in der Figur darinnen genommen wird, einige gerade Linien ziehet, ſo werden ſolche Linien einander in der Länge gleich ſeyn.

XVI.

Ein ſolcher gewiſſer Punct wird der Mittel-Punct des Circkels oder das Centrum geheiſſen.

XVII.

Der Diameter eines Circkels iſt eine gerade Linie, die durch den Mittel-Punct gehet, und mit ihrem Ende den Umkreiß des Circkels berühret, auch den gantzen Circkel in zwey gleiche Theile abtheilet, gleich wie B. A. C. Fig. XVII.

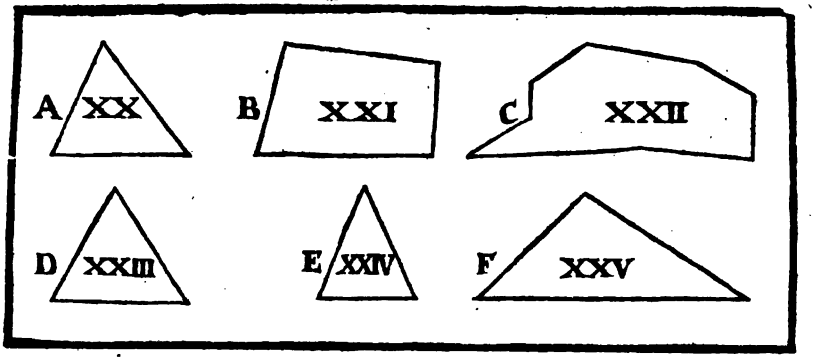
XVIII.

Ein halber Circkel iſt eine flache Figur, welche eingeſchloſſen wird von dem Diameter und dem halben Umbkreiß D. E. F. Fig. XVIII.

Den Umbkreiß eines gantzen Circkels pflegen die Mathematici in 360. gleiche Theile einzutheilen, welche ſie hernach Gradus nennen.

Einen Grad theilen ſie wiederumb in 60. Theil oder Minuten, und eine Minute in 60. Secunden ein.

Ein halber Umbkreiß hält 180. Grad.
Ein Viertel-Bogen oder Quadrant 90. Grad.



XIX.

Gerad-linichte Figuren ſind, welche aller Orten von geraden Linien eingeſchloſſen ſind.

XX.

Dreyſeitige Figuren, welche von drey geraden Linien eingeſchloſſen ſind, gleich wie A.

XXI.

Vierſeitige, die von vier geraden Linien eingeſchloſſen ſind, gleich wie B.

XXII.

Vielſeitige, die von mehr als vier geraden Linien eingeſchloſſen werden, als wie C.

XXIII.

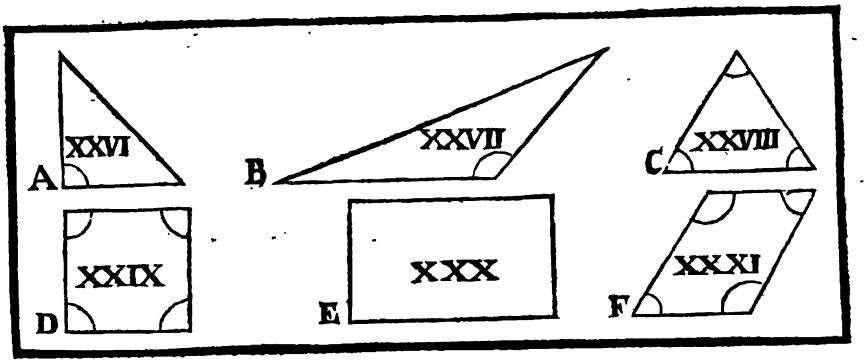
Unter denen dreyſeitigen Figuren wird ein gleichſeitiger Triangel genannt, welcher drey gleich-lange Seiten hat, wie D.

XXIV.

Der aber nur zwey gleich lange Seiten hat, wird Iſoſceles geheiſſen, wie E.

XXV.

Ein ungleichſeitiger, das iſt, deſſen drey Seiten ungleich ſind, ein ſolcher Triangel wird Scalenum genannt, wie F.



XXVI.

Uber dieſe iſt unter denen dreyſeitigen Figuren ein Recht-wincklichter Triangel derjenige, welcher einen rechten Winckel hat, wie A.

XXVII.

Ein ſtumpff-wincklichter Triangel oder Amblygonium iſt, welcher einen ſtumpffen Winckel hat, gleich wie B.

XXVIII.

Ein ſpiz-wincklichter Triangel oder Oxygonium iſt, welcher drey ſpizige Winckel hat, gleich wie C.

XXIX.

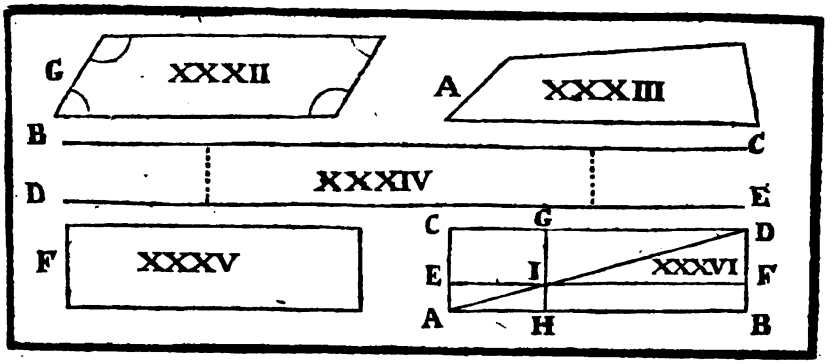
Unter denen vierſeitigen Figuren wird ein Quadrat oder Vier-Eck genannt, welches vier gleich-lange Seiten, und vier rechte Winckel hat, gleich wie D.

XXX.

Die aber vier rechte Winckel, nicht aber vier gleich-lange Seiten hat, wird ein winckelrechte ablange Vierung oder Rectangulum genannt, wie E.

XXXI.

Die vier gleich-lange Seiten hat, aber keinen rechten Winckel, wird eine geſchobene Vierung, oder Rhombus genannt, wie F.



XXXII.

Eine geſchobene verlängte Vierung, oder Rhomboides iſt genannt, welche zwey Seiten, und zween Winkeln gegen einander über ſtehend, gleich groß hat, als wie G.

XXXIII.

Auſſer dieſen benandten vierſeitigen Figuren, werden alle andere, ungleiche Vierungen, oder Trapezia, geheiſſen. A.

XXXIV.

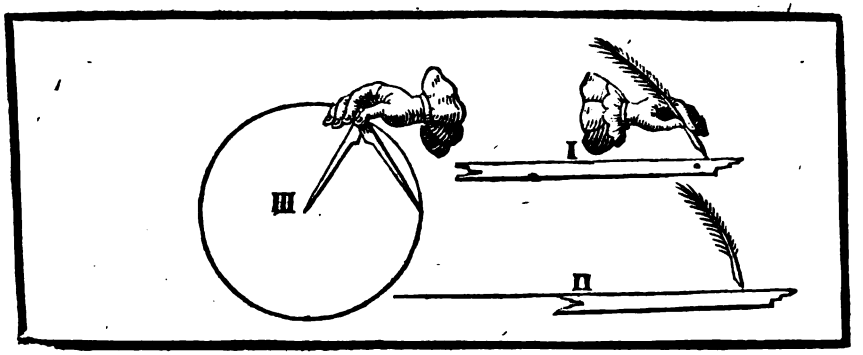
Gerade Parallel-Linien ſeynd, welche auf einerley Fläche liegen, und allzeit gleich weit von einander ſtehen, und ſich nimmermehr anrühren, noch zuſammen kommen, gleich wie BC. DE.

XXXV.

Ein Parallelogrammum iſt ein vierſeitige Figur, deſſen zwey gegenüberſtehende Seiten Parallel, oder gleich weit von einander ſeynd. F.

XXXVI.

Wann in einem Parallelogrammum (ABCD.) aus einem Winckel in dem andern gegen über ein Diameter (AD.) gezogen, und darmit das Parallelogrammum in zwey gleiche Theile abgetheilet worden iſt; unterdeſſen aber man auch zwey Parallel-Linien (HG, EF) innerhalb dieſes Parallelograms ziehet, welche ſich in einen Puncten (I) des Diameters (AD) ins Creutz durchſchneiden, und alſo vier Parallelogrammen machen: ſo werden hernach die zwey Parallelogrammen (HBIF, EICG) durch welche der Diameter (AD) nicht gehet, Complementen, oder Ausfühlungen, die zwey andere aber (AHEI, IFGD), durch welche der Diameter gehet, ſchlecht hinweg, die Parallelogrammen, ſo umb den Diameter ſtehen, genannt.



Begehrungen.

Poſtulata.

Die Sach iſt in ſich ſelber klar, und bedarff keines Beweiſſes, man geſteht es gar gern, daß es ſeyn kan, nemlich:

I.

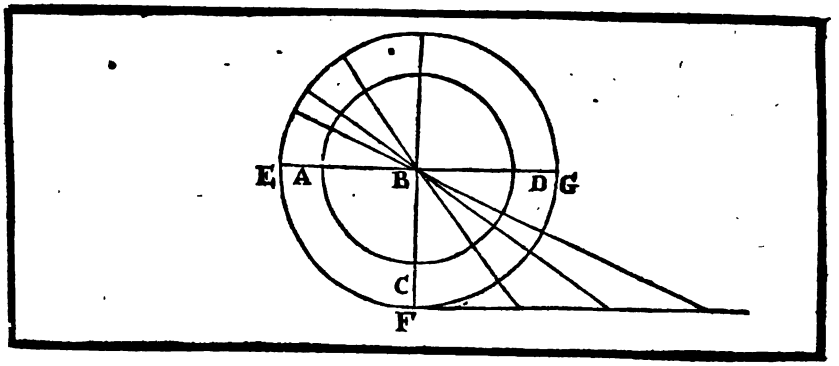
Von einem gegebenen Punct, zu einem andern Punct, eine gerade Linie zu ziehen. Fig. I.

II.

Eine gerade Linie hinaus gerade fort zu verlängern. Fig. II.

III.

Aus einem gegebenen Mittel-Punct, und gegebener Weite einen Circkel zu beſchreiben. Fig. III.



Allgemeine Wiſſenſchafft.

Axiomata.

I.

Die Dinge, welche einem Ding inſonderheit gleich ſeynd, die ſeynd gleich unter einander.

Alldieweilen die Linie BA ⊓ iſt der BC; und die BD auch ⊓ der BC durch die 15. Wort-Erklärung; ſo werden deßwegen alle drey BA, BD, BC unter einander ⊓ ſeyn.

II.

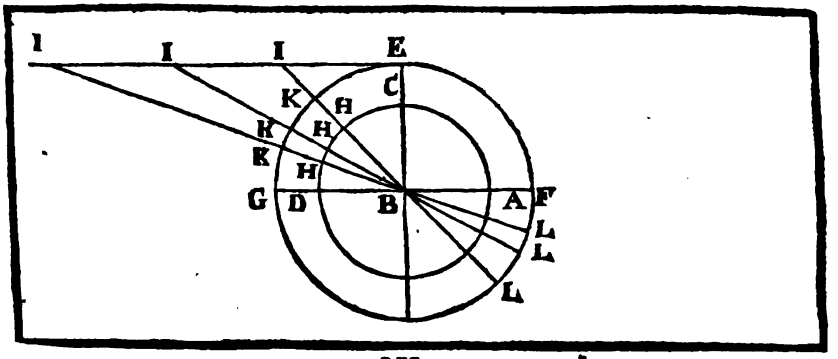
Wann gleiche Dinge zu gleichen Dingen hinzu geſetzt werden, ſo kommen gleiche Dinge heraus.

Weilen die AB ⊓ iſt der CB, und die CB ⊓ der DB: ſetze hinzu die Gleiche AE, CF, DG; ſo kommen heraus die Gleiche BE, BF, BG.

III.

So man von gleichem Dinge gleiches hinweg nimmt; ſo werden auch die übrigen Dinge einander gleich verbleiben.

Von denen Gleichen BE, BF, BG ſeynd hinweg genommen worden die Gleiche AB, CB, DB; die übrige AE, CF, DG werden auch gleich unter einander verbleiben.



IV.

Wann man zu ungleichen Dingen, gleiche Dinge hinzu ſetzet, ſo werden die zuſammen geſezte auch ungleich ſeyn.

Wenn man zu denen ungleichen Linien IK. die Gleiche BK. hinzu ſetzet, So werden auch die gantze BI. einander ungleich ſeyn.

V.

So von ungleichen Dingen gleiche abgezogen werden, ſo werden auch die überbliebene einander ungleich verbleiben.

Wann man von denen ungleichen Linien BI, die Gleiche BK darvon ziehet, So werden die überbliebene KI, einander noch ungleich ſeyn.

VI.

Alle Dinge, welche eines andern Dings (abſonderlich gegen einander gehalten) zwey, drey, viermahln, und ſo fort, gröſſer ſeynd, die ſeynd gleich einander.

Eine jede KL abſonderlich, iſt zwey mahlen ſo groß als BF. derohalben ſeynd alle KL gleich unter einander.

VII.

Diejenige Dinge, ſo jedes abſonderlich gerad der halbe, dritte, vierte Theil von einem andern Dinge iſt; die ſeynd auch gleich einander.

Alſo ſeynd alle KB, weilen ſie gerad die Helffte von GF ſeynd, einander gleich.

VIII.

Wann zwey oder mehr Dinge im Sinne auf einander gelegter verſtanden werden, und ſich durchaus zuſammen ſchicken, auch keines das andere, weder in der Länge, Dicke, noch Breite übertreffe, ſo ſeynd auch ſolche Dinge einander gleich.

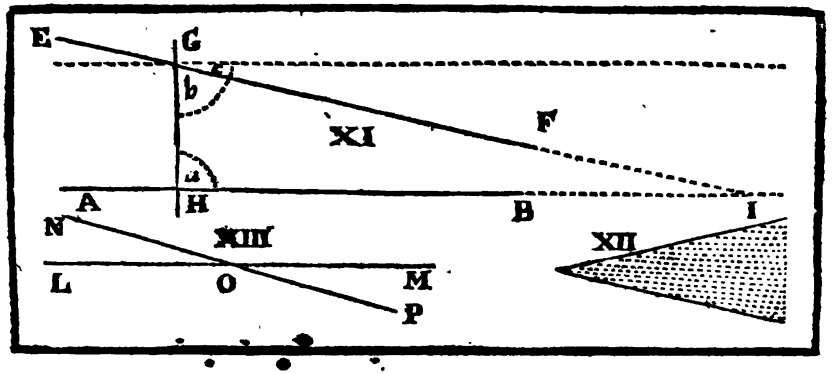
Alſo, wann man in einerley Form etwas gieſſet, oder machet, gleich wie die Ziegelſteine, ſo iſt klar, daß ſolche gantz und gar einander gleich groß werden: In denen flachen Figuren hat es eben dieſe Meinung, welche man insgemein Patronen, und Muſter nennet.

IX.

Das gantze iſt gröſſer, als ſein Theil.

X.

Alle rechte Winckel ſeynd einander gleich.



XI.

Wann über zwey gerade Linien (AB und EF), eine andere gerade Linie (GH) überzwerg gezogen wird, und die zwey inwendige Winckeln (a und b) mit einander kleiner machet, als zwey rechte Winckeln (a und b + c): da man hernach ſolche zwey Linien hinaus verlängert, werden ſie endlich auf derſelben Seiten, allwo die zween Winckeln kleiner, als zween rechte ſeynd, in einem Puncten (geſezt, als wie in I.) zuſammen kommen.

XII.

Zwey gerade Linien beſchlieſſen keinen Platz, und machen keine Figur: aufs wenigſt gehöret die dritte darzu.

XIII.

Zwey gerade Linien (LO und NO) können nicht aus einer geraden Linie (OM) entſpringen.

Dann wann die gerade Linie NO verlängert wird, ſo geſchicht es nach dem Puncten P, und nicht nach M: ſonſten würden ſie keine geradtrebne Linien ſeyn.

XIV.

Ein jedes ganzes Ding iſt gleich allen ſeinen Theilen ſammentlich: und hingegen alle Theile ſammentlich ſeynd gleich ſeinem Gantzen.

XV.

Wann ein ganzes Ding eines andern ganzen, und das Hinweggenommene des andern Weggenommenen doppelt iſt, ſo wird auch das übrige des andern übrigen doppelt ſeyn. u. ſ. f.

Anmerckungen.

Obwolen man noch eine gröſſere Anzahl deren, der Welt bekannten, gemeinen Wiſſenſchafften hätte hier bey; und aufbringen können; ſo hat man doch hierinnen mit Fleiß unterlaſſen, wohl wiſſend, daß das Folgende gnugſam mit Gegenwärtigen möge bewieſen werden.

Was den Beruff anlanget, welcher in dieſem Beweißthum immer ſtets beygeführet wird, iſt ſolcher auf folgende Weiſe zu verſtehen, als nemlich:

Ax.	bedeutet	Allgemeine Lehr, oder Grund-Spruch	Axioma.
Poſt.		Begehrung, Anforderung	Poſtulatum.
Def.		Wort-Erklärung	Definitio.
Corol.		Folge	Corollarium.
D.		Durch	Per.
B.		Buch	Liber.
Vorg.		Vorgab.	Propoſitio.
Handg.		Handgriff	Praxis, Operatio.
Zub.		Zubereitung	Conſtructio.
An.		Anmerckung	Nota.
Vor.		Vorgehend	Antecedens.

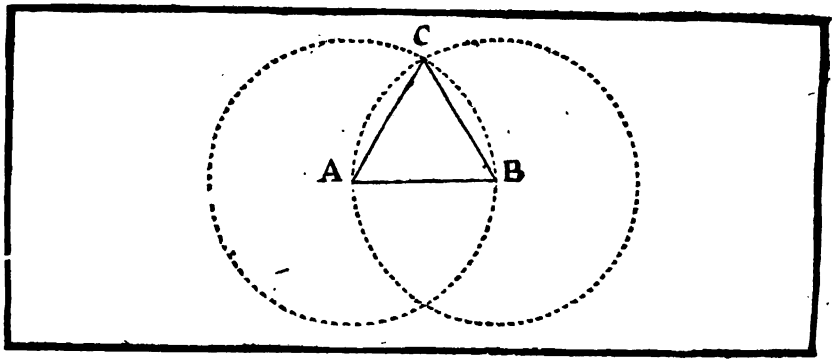
Zu einem Beyſpiel, es ſtehet geſchrieben 12. u. 3. b. leſe es alſo:

Durch die zwölffte Vorgab des dritten Buchs.

Man ſchreibt es aber noch kürtzer auf ſolche Weiß, d. 13. 4. das iſt:

Durch die dreyzehende Vorgab des vierten Buchs.

Problema, Theorema, und Lemma, ſeynd drey Griechiſche Wörtlein, ſo Euclides denen Vorgaben vorſetzet, und wollen nichts anders ſagen, als daß die Vorgab entweder ein Handgriff, eine Betrachtung, eine Erleichterung, oder Hülff des nachgehenden ſeye, ohne welchem es ſonſten nicht genugſam klar könte bewieſen werden.



Die Erſte Vorgab.

Handgriff.

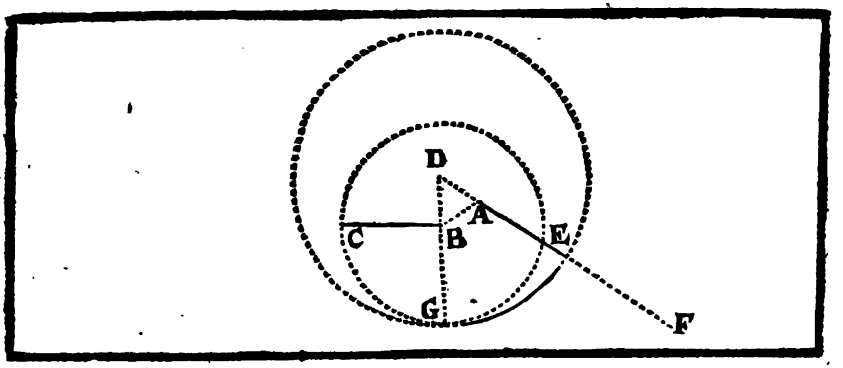
Auf einer gegebenen geraden Linie (AB) einen gleichſeitigen Triangel (ACB) zu machen.

Handgriff.

Aus denen zwey äuſſerſten Puncten A, und B.
mit der Weite der gegebenen Linie AB.
ſchreibe zween Circkel herum:
Allwo dieſe zwey Circkel ſich durchſchneiden, als wie in dem Puncten C.
Ziehe in ſolchen Durchſchnitts-Puncten C
die zwey geraden Linien AC, BC.
So iſt der gleichſeitige △ ACB verfertiget.

Beweiß.

Die Linie AC iſt ⊓, der Linie AB. d. 15. def. 1.
Die Linie CB iſt auch ⊓, der Linie AB. d. 15. def. 1.
Darumb ſeynd die drey Linien einander gleich. d. 1. ax.
Und deßwegen iſt der △ ACB ein gleichſeitiger △. d. 23. def. 1.
Welches zu machen ware.



Die II. Vorgab.

Handgriff.

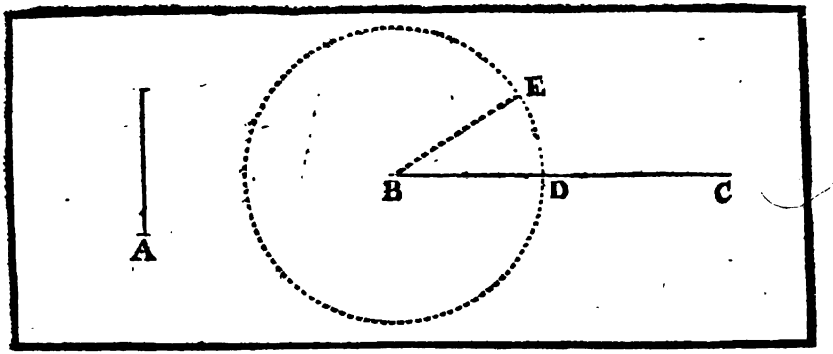
Aus einem gegebenen Puncten (A) eine gerade Linie (AE) zu ziehen, welche einer andern vorgegebenen geraden Linie (BC) gleich lang ſeye.

Handgriff.

Ziehe zuſammen die zween Puncten BA. d. 1. poſt.
Auf der Linie AB mache den gleichſeitigen △ ADB. d. 1. 1.
Aus dem Punct B, mit der Weite BC ſchreibe einen Circkel. d. 3. poſt.
Verlängere die Seiten DB biß am Umkreiß G.
und die Seiten DA hinauß in F. nach Gebühr.
Aus dem Punct D, mit der Weite DG, ſchreibe einen Circkel,
welcher die Linie DF durchſchneiden werde in E.
Die Linie AE wird alsdann ⊓ ſeyn, der Linie BC. ●

Beweiß.

Die Linie DB iſt ⊓, der Linie DA. d. d. Handg.
und die Linie DG iſt ⊓, der Linie DE. d. 15. def. 1.
Wann man von denen gleichen Linien DG, und DE
die gleiche Linien DB, und DA abziehet:
So wird überbleiben die Linie BG ⊓, der Linie AE. d. 3. ax.
Die Linie BG aber iſt ⊓, der Linie BC. d. 15. def. 1.
Dahero wird auch die Linie AE ⊓ ſeyn, der Linie BC.
Welches zu machen war.



Die III. Vorgab.

Handgriff.

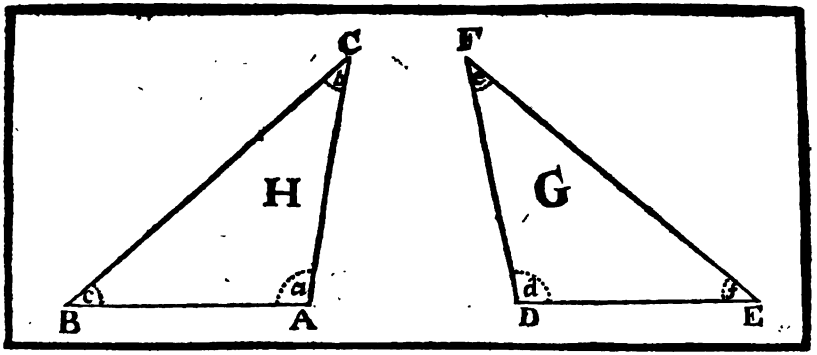
Von zwey gegebenen geraden Linien (A und BC) ungleicher Länge: von der Längern (BC) einen Theil (BD), welcher gleich iſt der gegebenen kürtzern Linie (A), abzuſchneiden.

Handgriff.

Aus dem Punct B mache die Linie BE ⊓, der Linie A. d. 2. I.
Schreibe aus dem Punct B, mit der Weite BE, einen Circkel, welcher die Linie BC durchſchneiden werde in D.
Nun ſage ich, daß das Stück, oder die Linie BD ⊓ ſeye abgeſchnitten worden der gegebenen Linie A.

Beweiß.

Die Linie BE iſt ⊓, der Linie BE. d. 15. def. I.
die Linie BE aber iſt ⊓, der Linie A. d. d. Hand.
Dahero wird auch die Linie BD ⊓ ſeyn, der Linie A. d. I. ax.
welche von der Längern BC iſt abgeſchnitten worden:
Welches zu machen ware.



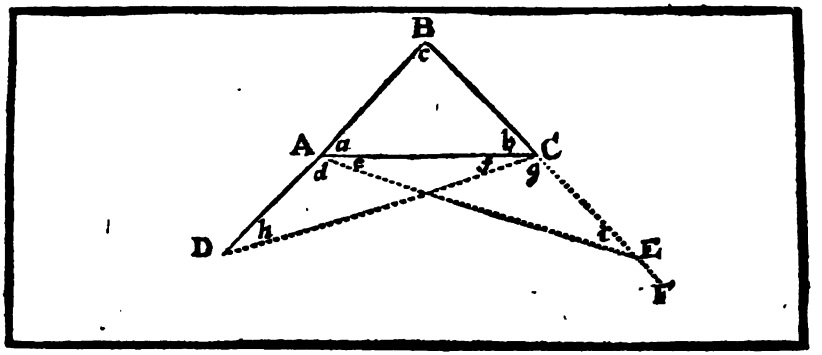
Die IV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann in zweyen Triangeln (H und G) zwo Seiten (AC, BC) eines, gleich ſeyn zweyen Seiten (DF, EF) des andern, eine jede inſonderheit der andern (gleich wie AC ⊓, DF, und BC ⊓, EF) auch die zween Winckeln (b und e), ſo von ſothanen gleichen Seiten gemacht werden, einander gleich ſeyn: alsdann werden auch die Baſes (AB und DE) einander gleich ſeyn; und der eine Triangel (H) wird ſich durchaus mit dem andern Triangel (G) vergleichen; auch die übrigen zwey Winckel, ſo von gleichen Seiten beſchloſſen ſeynd, werden einander gleich ſeyn; (das iſt, der Winckel a wird ⊓ ſeyn, dem Winckel d, und der Winckel c ⊓, dem Winckel f.)

Beweiß.

Weilen in dem △ H der ∠ b ⊓ iſt, dem ∠ e in dem △ G, d. d. Vorg.
und die Seiten AC ⊓, der Seiten DF. d. d. Vorg.
Item die Seiten CB ⊓, der Seiten FE.
So iſt klar, daß, wann man den △ ACB auf den △ DFE alſo legt, daß der Spitz C auf den Spitz F, und die Seiten AC auf DF, und BC auf EF zu liegen kommen, auch nothwendig die Linie AB auf die Linie DE fallen und eintreffen werde, das iſt:
Die Baſis AB wird ⊓ ſeyn der Baſis DE; und ſo fort wird ſich der ganze △ H mit dem △ G durchaus zuſammen ſchicken, und einander gleich ſeyn. d. 8. ax.
Dahero auch der ∠ a ⊓ ſeyn wird dem ∠ d; und der ∠ c ⊓, dem ∠ f. d. 8. ax.
Welches zu beweiſen ware.



Die V. Vorgab. Betrachtung.

In denen Triangeln (ABC), welche zwo gleiche Seiten (AB, CB) haben, ſeynd die zwey Winckel (a und b) ober der Baſis (AC) einander gleich: und wann die zwo gleiche Seiten (AB, CB) verlängert werden, (als wie in D und F) ſo ſeynd auch die zwey Winckel (d + e, und g + f) unter der Baſis (AC) einander gleich.

Zubereitung.

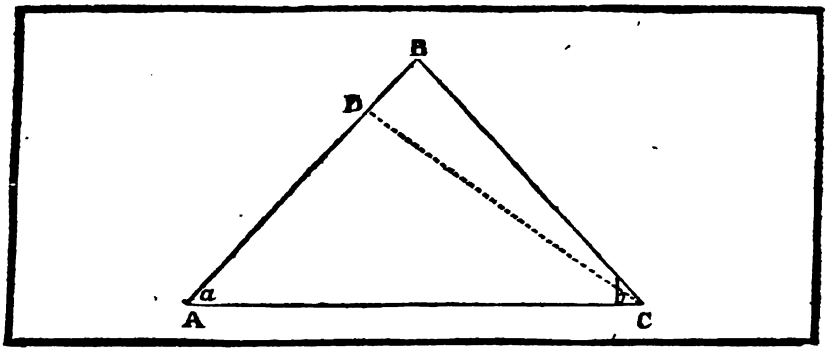
Mache CE ∏ AD; und ziehe zuſammen EA, und DC. [d. 3. 1. / d. 1. poſt.

Beweiß.

Betrachte erſtlich die zwey △ ABE, und BCD, alsdann ſage:
In dem △ ABE ſeynd die zwo Seiten AB, und BE ∏, denen zwo Seiten CB, und BD im △ BCD und der ∠ c iſt beyden △ gemein. [d. d. Vor. und Zub.
Darumb wird die Baſis AE ∏ ſeyn der Baſis CD.
Und auch die ∠ e + a, und ∠ i werden ∏ ſeyn, denen ∠ f + b, und ∠ h. d. 4. 1.
Betrachte zum andern die zwey △ ACE, und ACD ſprechend: [d. d. Zub. und d. Vor.
In dem △ ACE ſeynd die zwo Seiten AE, und CE ∏, denen zwo Seiten CD, und AD im △ ACD, und der ∠ i ∏ dem ∠ h. d. d. Vor.
Folget, daß auch die übrige zween ∠ e, und f + g ∏ ſeyn werden, denen übrigen zween ∠ f, und e + d. d. 4. 1.
Das iſt, der ∠ f + g iſt ∏, dem ∠ e + d unter der Baſis.
Unterdeſſen abziehe von denen gleichen ∠ e + a, und f + b die gleiche ∠ e, und f. d. d. Vor.
So wird überbleiben der ∠ a ∏, dem ∠ b ober der Baſis. d. 3. ax.
Welches zu beweiſen ware.

Folge.

Ein jeder gleichſeitiger Triangel iſt auch gleichwincklicht.



Die VI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann in einem Triangel (ABC) die zwey Winckeln (a, b) einander gleich ſeynd, ſo werden auch die zwo Seiten (AB und BC), welche die gleichen Winckeln unterſpannen, einander gleich ſeyn.

Beweiß.

Ob zwar dieſe Vorgab auß der vorgehenden für eine Warheit könte angenommen werden: ſo möchte dannoch einer einwerffen, daß eine von denen zwo Seiten geſetzt, als wie AB, ⌜ wäre, als die Seiten CB.

Mache derohalben nach deſſen Willen, (wofern es möglich iſt) die Seiten AD ⌝, BC, und hänge CD zuſammen.

Nunmehro, weilen in dem △ ADC die Seiten AD ⌝ iſt, der Seiten CB im △ ABC.

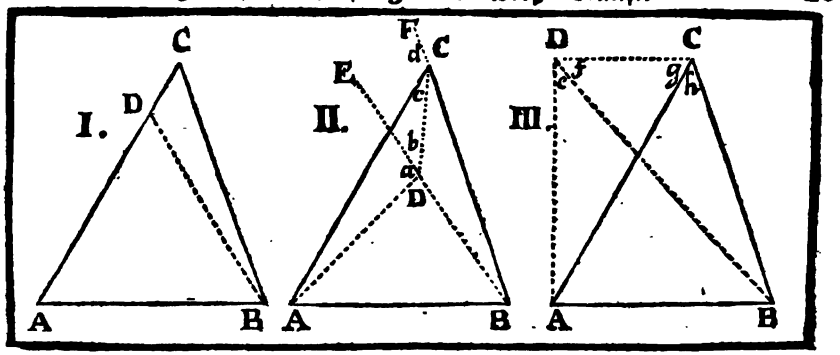
Und die Seiten AC beyden △ gemein; auch der ∠ a ⌝ iſt gegeben dem ∠ b. d. d. Vorg.

Folget, daß der △ ADC ⌝ ſeye, dem △ ABC. d. 4. I.

(nemlich ein Theil ſeinem gantzen): ſo nicht ſeyn kan, d. 9. ax.

Deßwegen iſt es noch wahr, daß die Seiten AB ⌝ ſeye der Seiten CB.

Welches zu beweiſen ware.



Die VII. Vorgab. Betrachtung.

Auff einer geraden Linie (AB) können nicht zwey andere gerade Linien, (als wie AD, BD) auß einerley Ende (AB) und gegen einerley Seiten, gleich denen erſten Linien (AC, BC. daß nemlich AD ⊓ ſeye, AC; und BD ⊓, BC) in einem andern Puncten (als nemlich in D) gezogen werden.

Dreyerley Fähle können in dieſen Betrachtungen vorkommen.

Beweiß I.

Wann man den Punct D in die Linie AC ſetzet.

So iſt es in ſich ſelbſt klar, daß die Linie AD nit ⊓ ſeye, der Linie AC. d. 9. ax.

II.

Wann der Punct D innerlich in dem △ ACB geſetzt wird:

So ziehe AD, und BD zuſammen.

Hernach verlängere nach Gebühr BD in E, und BC in F, und ziehe DC zuſammen, d. 2. poſt.

Weilen nun die Linie AD ⊓, der Linie AC geſetzt wird.

So wird in dem △ ACD, oder der Baſis DC, der ∠ a + b ⊓, ſeyn dem ∠ c. d. 5. 1.

Abermahlen, weiln die Linie BD ⊓, der Linie BC geſetzt wird.

So wird in dem △ DBC, unter der Baſis DC, der ∠ b ⊓ ſeyn, dem ∠ c + d. d. 5. 1.

Welches aber nicht ſeyn kan, indeme der ∠ b (welcher kurtz vorhero nur ein Theil deß ∠ b + a. und dahero kleiner, als der ∠ c ware,) nunmehro aber ⊓, als derſelbe ∠ c ſeyn ſolte. III.

Letzlich, wan der Punct D auſſerhalb den △ ABC geſetzt wird,

So ziehe zuſammen AD, BD, DC. Dieweilen die Linie AD ⊓, der Linie AC geſetzt wird, folget, daß in dem △ DAC der ∠ e + f ⊓ ſeye, dem ∠ g. d. 5. 1.

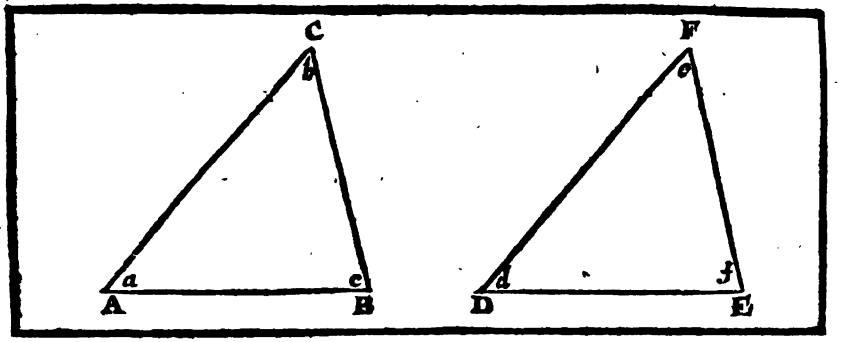
Abermahlen, weilen man ſetzet die Linie BD ⊓, BC,

So wird in dem △ DBC der ∠ f ⊓ ſeyn, dem ∠ g + h. d. 5. 1.

Der ∠ f aber ware vorgehends nur ein Theil deß ∠ e + f, und folgends auch nur ein Theil deß ∠ g. und jetzund ſolte derſelbe ∠ f ⊓ ſeyn dem noch gröſſern ∠ g + h, ſo wider die Vernunfft ſtreitet. d. 9. ax.

Dahero man ſchlieſſet, daß auff einer geraden Linie nicht zwey andere gerade Linien auß einerley Ende, und gegen einerley Seiten (gleich denen erſten Linien) in einen andern neuen Puncten können gezogen werden; ſondern ſolche werden nothwendig mit denen erſtgezogenen einfallen, und durchauß übereins kommen, und nur eine Linie machen.

Welches zu beweiſen ware.



Die VIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann ein Triangel (ABC) die drey Seiten, andern dreyen Seiten eines andern Triangels (DEF), eine jede der andern inſonderheit gleich hat: ſo werden auch die drey Winckeln Eines, denen drey Winckeln deß andern, ſo von gleichen Seiten unterſpannet ſeynd, ein jeder inſonderheit dem andern gleich ſeyn.

Beweiß.

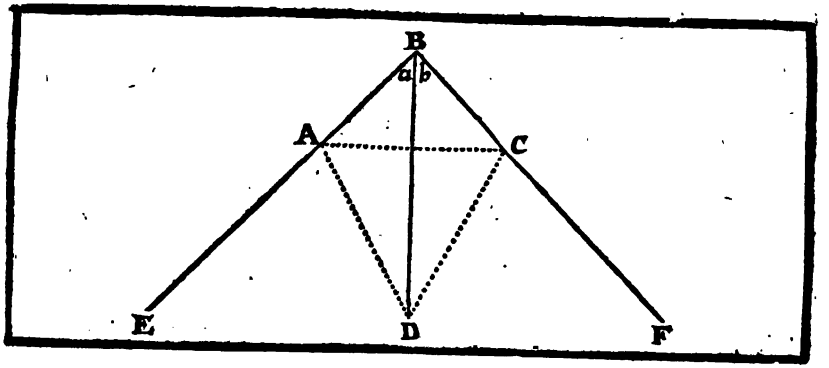
Betrachte im Sinne, als wenn der △ ABC auff den △ DEF geleget wäre.

Alsdann, weilen AB ⊓, iſt der DE: — d. d. Vorg.
ſo werden ſich beyde Linien durchauß auff einander ſchicken. — d. 8. ax.

Weilen auch AC ⊓, iſt der DF, und BC ⊓, der EF. — d. d. Vorg.
ſo wird der Spitz, C gerad auff F zu ligen kommen, und nicht in einen andern Punct auſſer, oder innerhalb deß △ DFE fallen.

Darumb ſo werden ſich die △ ABC, und DEF durchauß zuſammen ſchicken, und einander gleich ſeyn, und folgends auch der ∠ b ⊓, dem ∠ e. Item der ∠ a ⊓ dem ∠ d, und der ∠ c ⊓ dem ∠ f. — d. 8. ax.

Welches zu beweiſen ware.



Die IX. Vorgab.

Handgriff.

Einen gegebenen gerad-liniſchen Winckel (EBF) in zwey gleiche Theile zu ſchneiden.

Handgriff.

Mache AB ⊓, der BC.
Hange AC zuſammen.
Auff der Linie AC mache unter ſich den gleichſeitigen △ ADC.
Ziehe durch die Puncten B D eine gerade Linie, welche den gegebenen Winckel a + b gleich entzwey theilen werde.

d. 3. I.
d. I. 5.

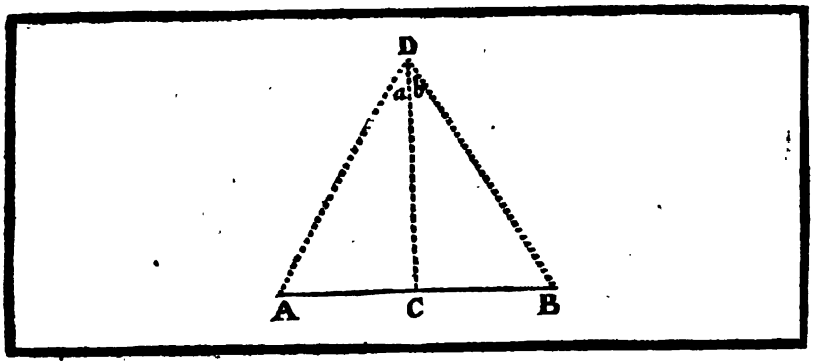
Beweiß.

In dem △ ABD iſt AB ⊓, der BC in dem △ CBD.
Die Linie AD iſt auch ⊓, der Linie CD.
Und die Seiten BD iſt auch beyden △ gemein.
Darumb wird der ∠ a ⊓ ſeyn dem ∠ b.
Welches zu machen ware.

d. 8. I. Handt.
d. I. I.
d. 8. I.

Folge.

Einen jeden gerad-liniſchen Winckel in gleiche Theile, als in 4. 8. 16. ſo fort, abzutheilen, iſt mehr nichts nöthig, als nur jederzeit den halben Winckel wiederum gleich entzwey zu ſchneiden.



Die X. Vorgab.

Handgriff.

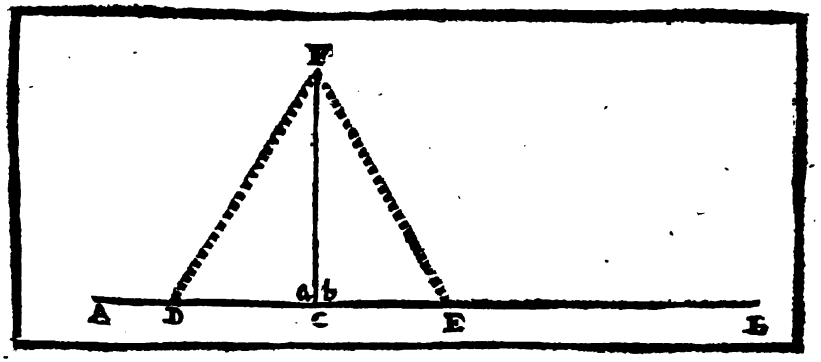
Eine gegebene gerade Linie (AB) in zwey gleiche Theile zu ſchneiden.

Handgriff.

Auff der Linie AB mache den gleichſeitigen △ ADB. d. 1. 1.
Den Winckel a + b ſchneide gleich entzwey mit der geraden Linie DC, d. 9. 1.
Welche auch die gegebene Linie AB in Puncten C gleich entzwey ſchneiden werde.

Beweiß.

In dem △ ACD iſt AD ⊓, DB in dem △ BCD. d. 1. 1.
Item die Seiten CD, iſt beyden △ gemein.
und der ∠ a iſt ⊓ gemacht worden, dem ∠ b. d. d. Hand.
So folget, daß die Baſis AC ⊓ ſeye, der Baſis CB. d. 4. 1.
Welches zu machen ware.



Die XI. Vorgab.

Handgriff.

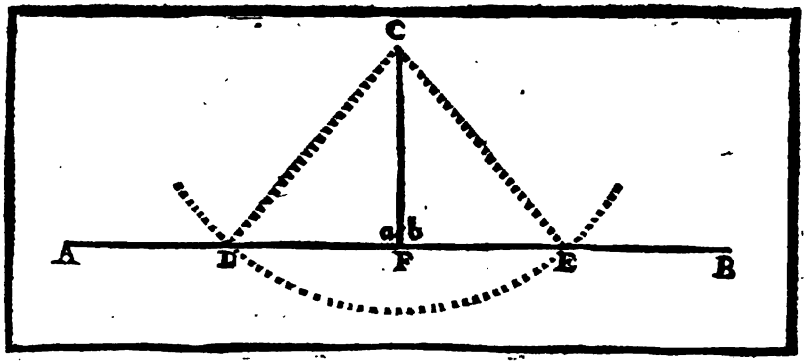
Auff einer geraden Linie (AB) auß einem gegebenen Puncten (C) eine bleyrechte Linie (CF) auffzurichten.

Handgriff.

Mache CD ⊓, CE. d. 3. I.
Auff der Weite DE mache den gleichſeitigen △ DFE. d. 1. I.
Ziehe durch die Puncten F und C die gerade Linie FC, welche die verlangte bleyrechte Linie ſeyn werde.

Beweiß.

In dem △ DCF iſt CD ⊓, CE in dem △ ECF, d. d. Hand.
und DF iſt ⊓, EF. d. 1. I.
die Seiten CF iſt auch beyden △ gemein.
Dahero wird der gantze △ DCF ⊓ ſeyn, dem gantzen △ ECF. d. 8. I.
und folgends auch der ∠ a ⊓, dem ∠ b.
Deßwegen iſt CF eine bleyrechte Linie. d. 10. def. I.
Welches zu machen ware.



Die XII. Vorgab.

Handgriff.

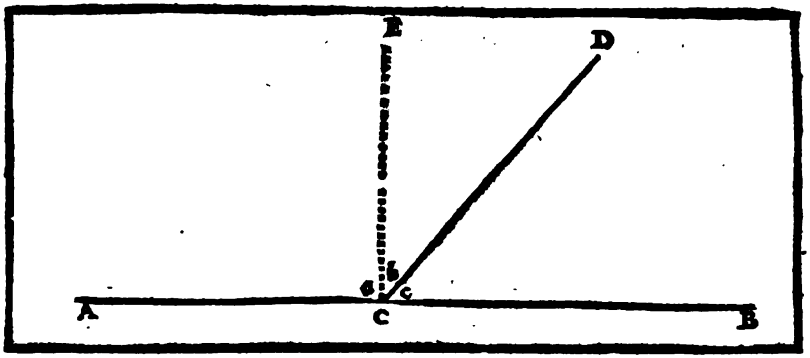
Auß einem gegebenen Puncten (C), welcher auſſerhalb einer gegebenen geraden Linie (AB) iſt, eine bleyrechte Linie (CF) auff ſolche (AB) herunter zu laſſen.

Handgriff.

Auß dem Punct C ſchreibe nach Gebühr einen Circkel-Bogen, welcher die vorgegebene AB durchſchneide in zweyen Puncten, als wie in D und E.
Zertheile DE in mitten entzwey im Puncten F. d. 10. 1.
Ziehe die gerade Linie CF, welche die verlangte bleyrechte Linie ſeyn werde.

Beweiß.

Ziehe vorhero die Puncten CD. und CE. mit geraden Linien zuſammen; nunmehro
In dem △ DFC iſt DF ⊓, EF in dem △ EFC, d. d. Hand.
und DC iſt ⊓, EC. d. 15. def. 1.
auch die Linie FC iſt beyden △ gemein.
Darum wird der gantze △ DFC ⊓ ſeyn, dem gantzen △ EFC d. 8. 1.
und folgends der ∠ a ⊓, dem ∠ b.
Deßwegen iſt die gerade Linie FC die bleyrechte Linie d. 10. def. 1.
auff der gegebenen Linie AB.
Welches zu machen ware.



Die XIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn eine gerade Linie (DC) auff einer andern geraden Linie (AB) ſtehet: ſo machet ſolche Linie (CD) zween Winckeln (a + b und c), welche, entweder zween rechte Winckeln, oder beyde zuſammen genommen, zween rechten gleich ſeynd.

Beweiß.

Wenn die gerade Linie CD auff AB ſtehet, und beyde Winckeln a + b, und c einander gleich machet: ſo iſt klar, daß beyde Winckel rechte Winckeln ſeynd. b. 10. def. 1.

Solte aber die gerade Linie CD zween ungleiche Winckeln machen, nemlich den ∠ a + b ⌐, als den ∠ c.

So erhöhe aus dem Punct C die bleyrechte CE. b. 1. 1.

Dieweilen nun denen zweyen ∠ b, und c ⌐ iſt, der Rechte ∠ b + c. nemlich die Theile ſeinem Gantzen.

Wenn man unterdeſſen, beyderſeits hinzuſetzet den rechten ∠ a.

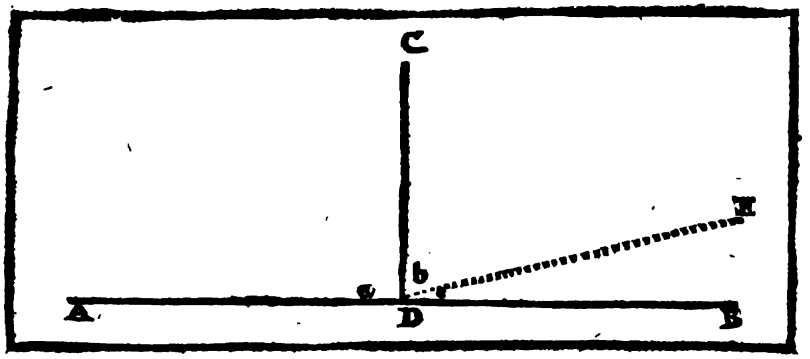
So werden ſo wohl die drey ∠ c, b, a ⌐ ſeyn, zweyen rechten ∠; als die zwey ∠ b + c und a.

Dann es iſt klar, daß die drey Winckel, c, b, a eben denſelben Raum, welchen die zween ∠ a, b + c, oder die zween ∠ a + b, c einnehmen, begreiffen.

Welches zu beweiſen ware.

Folge.

Wann der eine Winckel c ein rechter iſt, ſo wird auch der andere Winckel a + b ein rechter ſeyn; wann er aber ein ſpitziger iſt: ſo werde der andere ein ſtumpffer Winckel ſeyn.



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann auß einem Punct (D) in eine gegebene gerade Linie (DC) zwo gerade Linien (DA, DB:) nicht auff eine Seiten gezogen ſeynd, und hernachmahln die zween Winckeln (a und b + c) zween rechten Winckeln gleich groß gemacht haben: ſo werden ſothane zwo Linien (DA, DB) ſchnur geradt ligen (das iſt, die Linie ADB wird eine gerade Linie ſeyn.)

Beweiß.

Geſetzt, es wären die Linien AD, und DB nicht eine ſchnurgerade Linie: ſo ſeye dann eine ſolche eine andere, als wie DE, welche mit AD eine ſchnurgerade Linie machen ſolte.

Darauff folget, weilen die gerade Linie CD auff der vermeinten ſchnurgeraden Linie ADE ſtehet, Daß die zwey ∠ a und b ⊓ ſeyn, zween rechten Winckeln. d. 13. I.

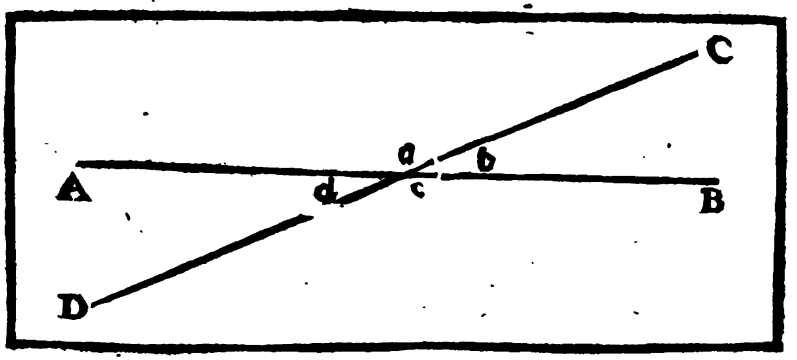
Nach der Vorgab aber ſeynd die ∠ a, und b + c auch ⊓ ℓ, zween rechten Winckeln.

Wann man nun beyderſeits den gemeinen ∠ a abziehet, ſo wird überbleiben der ∠ b ⊓, dem ∠ b + c.

Welches nicht möglich iſt, daß nemlich ein Theil ſeinem gantzen gleich ſeye.

Darumben iſt zu ſagen, daß die Linie ADB allein dieſelbe ſchnurgerade Linie ſeyn müſſe. d. 9. ax.

Welches zu beweiſen ware.



Die XV. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn zwo gerade Linien (AB, DC) ſich einander durchſchneiden, ſo werden ſie die zween Winckeln (a und c, oder b und d), welche bey dem Punct der Durchſchneidung gegen einander über ſtehen, einander gleich machen.

Beweiß.

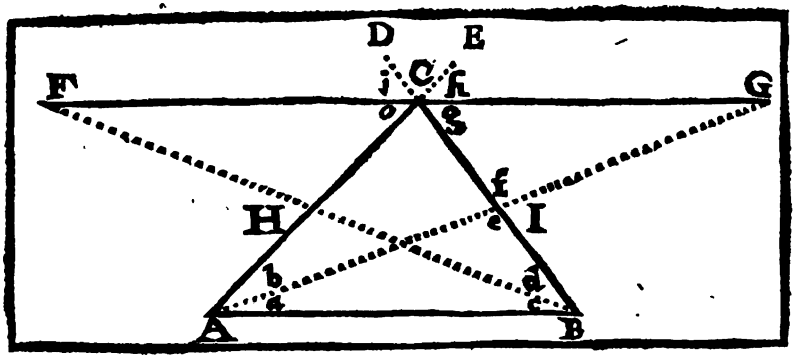
Dieweilen CD auf AB ſtehet, ſo werden die zween ∠ a und b ⊓ ſeyn, zween rechten ∠. — d. 13. I.
Ebnermaſſen, weilen die Linie AB auff der Linie DC ſtehet, ſo werden die zween ∠ b und c ⊓ ſeyn, zween rechten ∠. — d. 13. I.
Wenn man unterdeſſen beyderſeits den gemeinen ∠ b darvon ziehet; So wird überbleiben der ∠ a ⊓, dem ∠ c. — d. 3. ax.
Nach ſolchem Beweiß wird auch der ∠ b ⊓ ſeyn, dem ∠ d.
Welches zu beweiſen war.

Folge. I.

Wenn zwo gerade Linien ſich einander durchſchneiden, ſo werden die vier ∠ umb den Durchſchneids-Puncten, gleich vier rechten ∠ ſeyn.

II.

Alle Winckeln, ſo viel ihrer auf einem Punct mögen gezogen werden, machen ſämmentlich nicht mehr, als nur vier rechte Winckeln.



Die XVI. Vorgab.

Betrachtung.

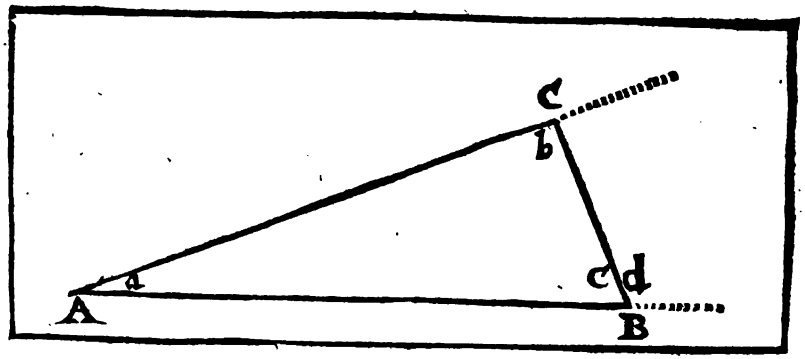
Wann eine Seiten (AC oder BC) eines Triangels (ABC) verlängert wird, (als wie in E oder D): ſo wird der außwendige Winckel (h + g, oder i + o) gröſſer ſeyn, als ein jeder von denen zween inwendigen Winckeln (b + a, oder d + c, die dargegen über ſtehen.

Zubereitung.

Zertheile ſo wol BC, als AC gerad entzwey in I und H. d. 10. I.
Ziehe AIG, und BHF durch I und H ſo weit hinauß,
Biß IG ▭ ſeye, AI; und HF ▭, HB.
Hänge CG, CF zuſammen.

Beweiß.

In denen zwey △ AIB, GIC iſt BI ▭, der CI. d. d. Zub.
und AI ▭, IG · auch der ∠ e iſt ▭, dem ∠ f. d. 15. I.
Dahero iſt der gantze △ AIB ▭, dem gantzen △ GIC, d. 4. I.
und alſo folgends der ∠ c + d ▭, dem ∠ g.
auff ſolche Weiſe iſt in denen △ BAH, FHC der ∠ b + a ▭, dem ∠ o.
Unterdeſſen iſt der ∠ g + h ▭ als ſein Theil, nemlich als der ∠ g, d. 9. ax.
oder als der ∠ h, welcher ſonſten ▭ iſt, dem ∠ o. oder b + a {d. 15. I.
Dahero wird auch der ∠ g + h ▭ ſeyn, als der ∠ c + d, {und die vor.
oder, als der ∠ a + b.
Welches zu beweiſen ware.



Die XVII. Vorgab.

Betrachtung.

In einem jeden Triangel (ABC) ſeynd zween Winckel, man nehme zuſammen welche man wolle (als wie b und c), kleiner als zween rechte Winckeln.

Zubereitung.

Verlängere die Seiten AB, und AC.

Beweiß.

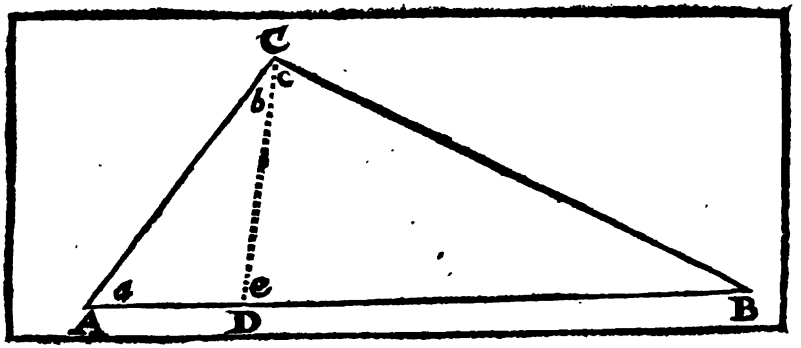
Der äuſerliche ∠ d iſt ⌜, als der innerliche ∠ b. d. 16. 1.
Setze beyderſeits hinzu den gemeinen ∠ c.
So werden die zween ∠ d und c ⌜ ſeyn,
als die zween ∠ b und c. d. 4. ax.
Die zween ∠ d und c aber ſeynd ⌐, zween rechten ∠ d. 13. 1.
Darum werden die zween ∠ b und c ⌝ ſeyn, als zween Rechte ∠.
Welches zu beweiſen ware.

Folge. I.

Wann in einem △ ein Rechter, oder ſtumpffer Winckel iſt,
So werden die zween übrige, ſpitzige, oder ſcharffe ∠ ſeyn.

II.

In denen drey gleichſeitigen △ ſeynd alle drey Winckel ſpitzig.



Die XVIII. Vorgab.

Betrachtung.

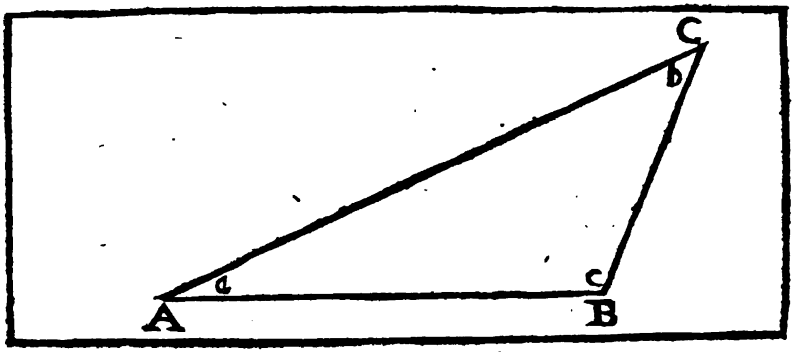
In einem jedwedern Triangel (ABC) unterſpannet die längere Seite (AB) den gröſſern Winckel (b + c)

Beweiß.

Wenn man es nicht glaubet, ſondern ſaget daß die kürtzere Seiten BC einen gröſſern ∠ a unterſpanne.
So mache von B auß, das Stück BD ⊓, der Seite BC. d. 3. I.
und ziehe DC. zuſammen.
Weilen in dem △ CBD die Seite BD ⊓ iſt, der Seiten CB, d. d. Zub.
ſo wird der ∠ e ⊓ ſeyn, dem ∠ c. d. 5. I.
Der ∠ e aber, als ein außwendiger ∠, iſt Γ,
als der inwendige ∠ a allein.
Darum wird auch der Winckel c Γ ſeyn, als der ∠ a. d. 16. I.
und folgends der gantze ∠ b + c noch viel Γ, als der ∠ a. d. 9. ax.
Darauß man ſchlieſſet, daß alſo die kürtzere Seite BC
nicht von einem gröſſern, ſondern von einem kleinern Winckel
unterſpannet werde.
Das iſt, der gröſſere ∠ b + c unterſpannet die längere Seiten AB,
und der kleinere ∠ a die kürtzere CB.
Welches zu beweiſen ware.

Folge.

In einem ungleichſeitigen Triangel ſeynd alle drey Winckel
einander ungleich.



Die XIX. Vorgab.

Betrachtung.

In einem Triangel (ABC) unterspannet der grössere Winckel (c) die längere Seiten (AC).

Beweiß.

Solst du es aber nicht glauben, sondern sagen, daß die Seiten AC nicht länger, als AB, sondern derselben gleich seye.

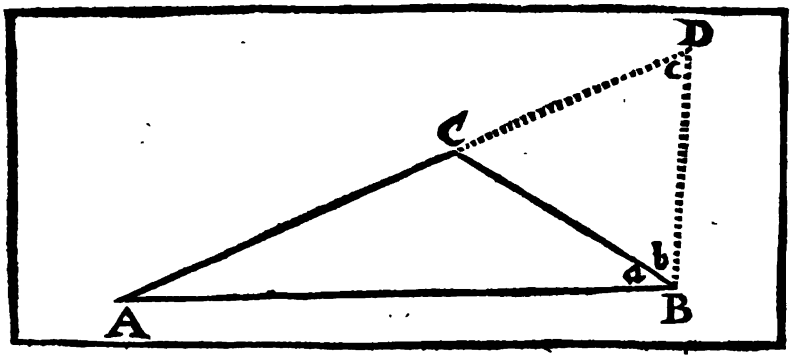
So folget stracks darauff, daß auch der ∠ c ⌐ seye, dem ∠ b. d. 5. I. so nicht seyn kan.

Dann der ∠ c gleich anfangs der grössere gegeben worden ist.

Solst du nun sagen, daß AC ⌐ wäre, als AB, so folget, daß der ∠ c auch ⌐ wäre, als der ∠ b, d. 18. I. Welches eben wider die Vorgab streittet.

Dahero muß nothwendig die Seiten AC, welche den grössern ∠ c unterspannet, die längere Seiten in dem △ ABC seyn.

Welches zu beweisen ware.



Die XX. Vorgab.

Betrachtung.

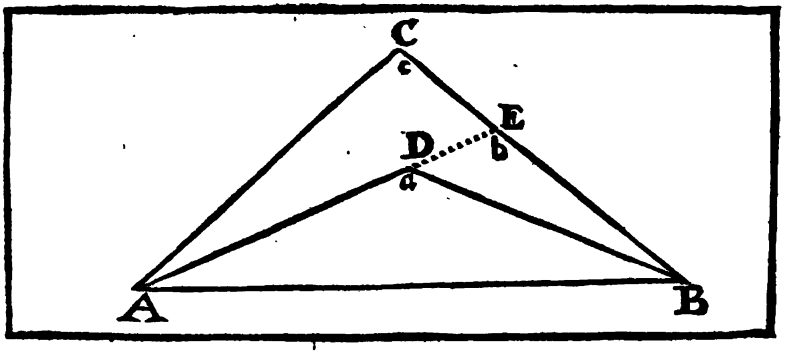
Eines jedwedern Triangels (ACB) zwo Seiten zuſammen genommen, (als wie AC + CB) ſeynd gröſſer, als die dritte (AB) allein.

Zubereitung.

Verlängere AC, biß daß CD ⌐ ſeye, der Seiten CB.
ziehe DB zuſammen.

Beweiß.

In dem △ BCD iſt die Seiten CD ⌐, der Seiten CB. d. d. Zuß.
Darumb wird der ∠ b ⌐ ſeyn, dem ∠ c. d. 5. 1.
Der ∠ b + a aber iſt ⌜, als der ∠ b. d. 9. ax.
Folget, daß auch der ∠ b + a ⌜ ſeye, als der ∠ c.
Ein gröſſerer Winckel aber unterſpannet eine längere Seiten. d. 19. 1.
und ein kleinerer Winckel eine kleinere Seiten.
Darumb wird die Seiten AD ⌜ ſeyn, als die Seiten AB.
Die Seiten AD aber iſt ⌐, denen zwo Seiten AC und CB. d. d. Zuß.
Deßwegen werden die zwo Seiten zuſammen genommen
⌜ ſeyn, als die dritte AB.
Welches zu beweiſen ware.



Die XXI. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn auß beyden Enden einer Seiten (AB) eines Triangels (ABC), zwo Linien (AD, BD) innerlich gezogen werden, alſo, daß ſie einen Triangel (ABD) machen: ſo werden ſolche zwo Linien (AD, und BD) kürtzer ſeyn, als die zwo Seiten (AC und CB) deß Triangels (ABC); der Winckel aber (a), ſo dieſe zwo kürtzern Seiten machen, wird gröſſer ſeyn, als der Winckel (c) deß Triangels (ABC).

Zubereitung.

Verlängere AD in die Seiten deß △ ACB, nemlich in E.

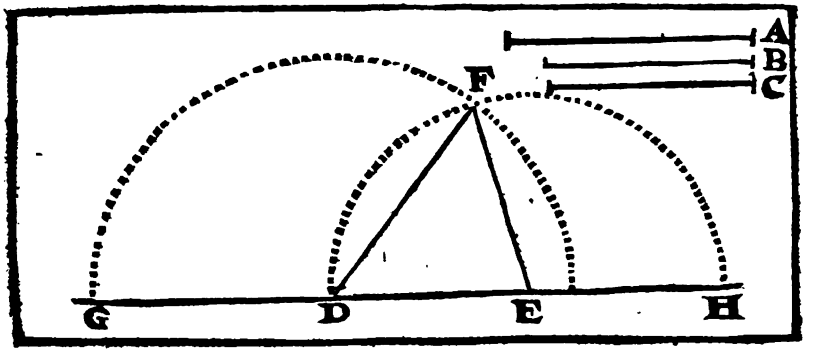
Beweiß.

I.

In dem △ AEC ſeynd die zwo Seiten AC, und CE ⌜, als AE. d. 20. 1.
ſetze hinzu beyderſeits die gemeine Seiten EB.
So werden AC, und CE + EB, das iſt CB, ⌜ ſeyn, als AE + EB. d. 4. ax.
Eben in dem △ BDE werden die zwo Seiten DE und EB ⌜ ſeyn, als DB. d. 20. 1.
ſetze hinzu beyderſeits die gemeine AD,
So werden EB, und ED + AD, das iſt AE ⌜ ſeyn, als DB + AD.
AC, und CB ſeynd aber bewieſen worden ⌜, als AE + EB. d. d. Vor.
Darum werden AC, und CB noch viel ⌜ ſeyn, als AD, und DB.

II.

Der äuſſerliche ∠ a iſt ⌜, als der innerliche ∠ b. d. 16. 1.
Dieſer ∠ b aber, als ein äuſſerlicher, iſt auch ⌜, als der innerliche ∠ c. d. d. ſelbe.
Dahero wird der ∠ a noch viel ⌜, als der ∠ c ſeyn.
Welches zu beweiſen ware.



Die XXII. Vorgab.

Handgriff.

Auß drey gegebenen geraden Linien (GD, DE, EH), welche gleich seynd drey andern gegebenen geraden Linien (A, B, C,) einen Triangel (DEF) zu machen; es müssen aber allzeit zwo Linien zusammen genommen, länger als die dritte seyn.

Handgriff.

Denen gegebenen A, B, C nemme nach einander gleich die Linien GD, DE, EH geradt in einer Linie fort. b. 3. 1.

Auß D mit der Weite GD, schreibe einen Circkel GF. b. 3. post.

Item auß E mit der Weite EH schreibe einen andern Circkel, welcher den ersten durchschneidet in F.

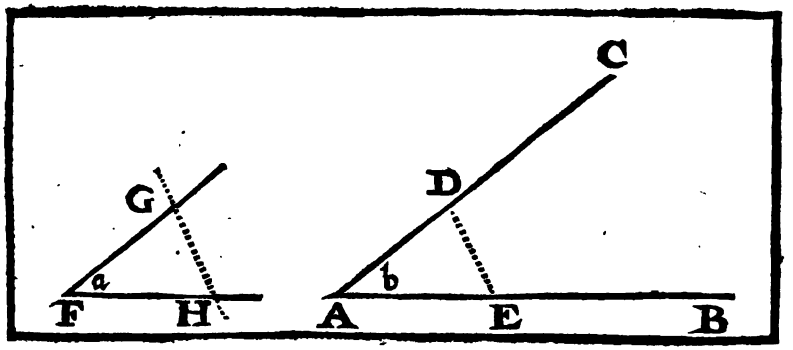
Ziehe zusammen FD, und FE, so ist der △ DEF gemacht.

Beweiß.

In dem △ FDE ist die Seiten DF ⊓ der DG, oder der Linie A
Die Seiten FE ist ⊓ der EH, oder der Linie C. } b. d. Hand. b. 15. def. 1.
und letzlich DE ist ⊓ gemacht worden, der Linie B.

Dahero ist der △ DEF auß denen vorgegebenen drey Linien veefertiget worden.

Welches zu machen ware.



Die XXIII. Vorgab.

Handgriff.

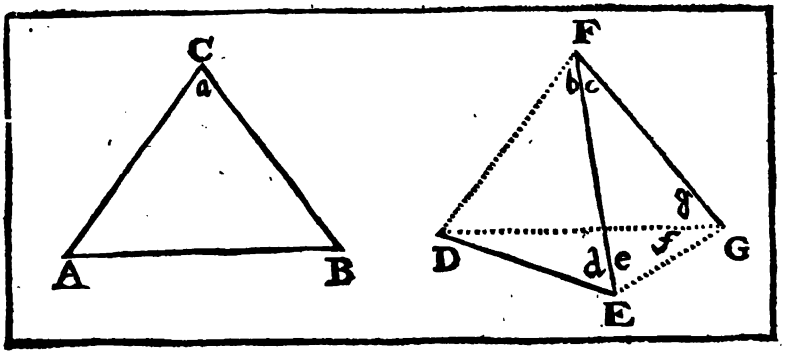
Auß einem gegebenen Punct (A) auff einer gegebenen geraden Linie (AB) einen geradliniſchen Winckel (b) zu machen, welcher einem vorgegebenen Winckel (a) gleich groß ſeye.

Handgriff.

Ziehe überzwergs nach Gefähr die gerade Linie GH, welche die beyde Seiten deß ∠ a durchſchneide in denen Puncten GH.
Mache AE ⊓, der FH. d. 3. I.
Hernachmahlen auff AE mache den △ AED ⊓, dem △ FHG, d. 22. I.
alſo, daß die Seit AD ⊓ ſeye, der Seiten FG,
und ED ⊓, der GH.
So wird der ∠ b ⊓ gemacht worden ſeyn, dem ∠ a.

Beweiß.

Es iſt klar aus vorgemachtem Handgriff, weilen alle drey Seiten AE, ED, DA ⊓ ſeynd gemacht worden denen drey Seiten FH, HG, GF.
Daß der △ AED ⊓ ſeye dem △ FHG. d. 8. I.
und folgends der ∠ b ⊓ dem ∠ a.
Welches zu machen ware.



Die XXIV. Vorgab.

Betrachtung.

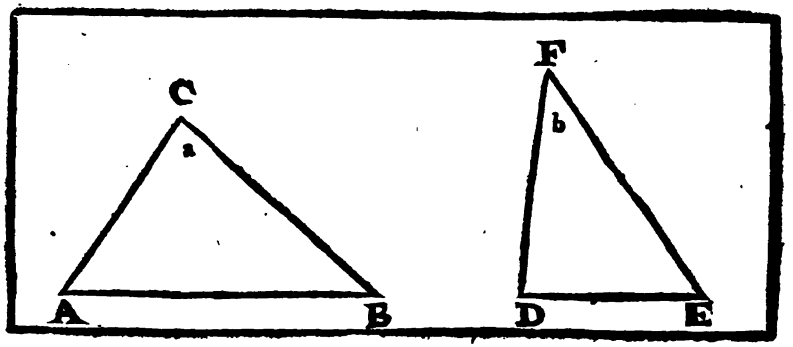
Wenn ein Triangel (ABC) zwo Seiten (AC und BC) gleich hat andern zwo Seiten (DF und EF) eines andern Triangels (DEF, das ist, AC ⊓, DF; und BC ⊓, EF) der eine Winckel aber (a) gröſſer ist als der andere (b): so wird auch die eine Basis (AB) länger seyn, als die andere (DE).

Zubereitung.

Auß dem Punct F, auff der Linie DF, mache den ∠ b + c ⊓, dem ∠ a. d. 23. I.
Die Seiten FG aber ⊓, der Seiten FE, oder CB,
So wird folgends die Basis DG ⊓ seyn, der Basis AB d. 4. I.
Ziehe unterdessen zusammen DG, und EG.

Beweiß.

Wegen deren gleichen Seiten EF, und GF
wird der ∠ g + f ⊓ seyn, dem ∠ e. d. 5. I.
Der gantze ∠ d + e aber ist ⊏, als der ∠ e. d. 9. ax.
Darum wird der ∠ d + e auch ⊏ seyn, als der ∠ g + f:
Und so fort wird der ∠ d + e noch viel ⊏ seyn, als der ∠ f allein.
Darauß folget, daß die Linie DG (welche ⊓ ist, der Basis AB) d. d. Zub.
auch gröſſer seye, als die Basis DE. d. 19. I.
Welches zu beweisen ware.



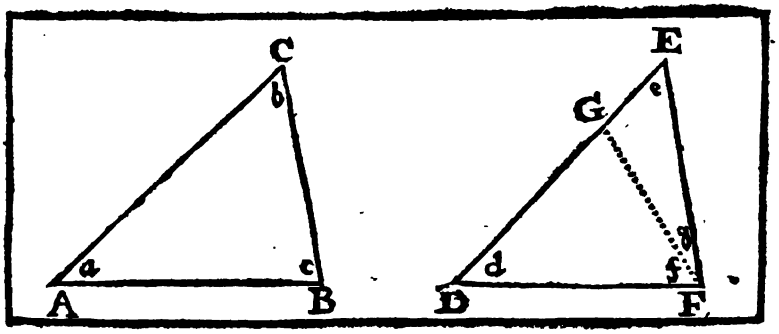
Die XXV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann ein Triangel (ABC) zwo Seiten (CA, CB) zweyen andern Seiten (DF, FE) eines andern Triangels (DEF), eine jede der andern inſonderheit gleich hat (nemlich AC ⊓, DF; und CB ⊓ FE), die eine Baſis (AB) aber länger iſt, als die andere Baſis (DE): ſo wird auch der eine Winckel (a), welcher von der längern Baſis (AB) unterſpannet iſt, gröſſer ſeyn, als der andere Winckel (b), welcher von der kürtzern Baſis (DE) unterſpannet iſt.

Beweiß.

Geſetzt man ſage, daß der ∠ a nicht ⊓ ſeye, als der ∠ b,
So muß er entweders ihme ⊓, oder kleiner ſeyn.
Solte er nun ⊓ ſeyn, dem ∠ b,
ſo folgete, daß die Baſis AB ⊓ wäre, der Baſis DE, d. 4. I.
Welches aber widet die Vorgab ſtreitet.
Solte aber der ∠ a ⌝ ſeyn, als der ∠ b,
ſo würde auch die Baſis AB ⌝ ſeyn, als die Baſis DE, d. 24. I.
Welches eben wider die Vorgab ſtreitet.
Dahero muß noch nothwendig der ∠ a ⊓ ſeyn,
als der ∠ b.
Welches zu beweiſen ware.



Die XXVI. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn in einem Triangel (ABC) zween Winckel (a und c) andern zweyen Winckeln (d und f + g) in einem andern Triangel (DEF), ein Winckel dem andern inſonderheit, gleich ſeynd, und auch eine Seiten eines Triangels gleich iſt einer Seiten deß andern, ſothane Seiten mögen hernachmahlen zwiſchen denen gleichen Winckeln liegen, oder von einem unter denſelben gleichen Winckeln unterſpannet ſeyn: ſo werden auch die übrige zwo Seiten eines Triangels denen zwo übrigen Seiten deß andern Triangels, und auch der dritte übrige Winckel eines, dem dritten übrigen Winckel deß andern, und ſo fort der gantze Triangel (ABC) dem gantzen Triangel (DEF) gleich ſeyn.

Gegenwärtige Vorgab hat zween Fähle. In dem erſten können die gleiche Seiten zwiſchen denen zweyen gleichen Winckeln liegen: und in dem anderten können ſie nicht zwiſchen denen gleichen zwey Winckeln liegen, ſondern nur von einem dergleichen Winckeln unterſpannet ſeyn.

Seye dahero der △ ABC, deſſen ∠ a und c ⊓ ſeynd, denen ∠ d und g + f in dem △ DEF;

Und die Seiten AB, ſo zwiſchen denen gleichen ∠ a und c liget, ſeye ⊓, der Seiten DF, welche eben zwiſchen denen gleichen ∠ d und f + g liget.

Demnach ſagt man, daß auch die übrige zwo Seiten AC, und CB ⊓ ſeyn, denen übrigen zwo Seiten DE, und EF, und der ∠ b ⊓, dem ∠ e.

Beweiß

Beweiß deß Erſten Fahls.

Wolte man es nicht glauben, vermeinend es wäre die Seiten AC ⌉, als die Seiten DE.

So mache dann (wann es möglich iſt) DG ⌈, AC. und ziehe GF zuſammen.

Nun iſt in dem △ ABC die Seiten AB ⌈, der Seiten DF. d. d. Vorg.
und die Seiten AC ⌈, der Seiten DG. d. d. Zub.
und der ∠ a ⌈, dem ∠ d. d. d. Vorg.

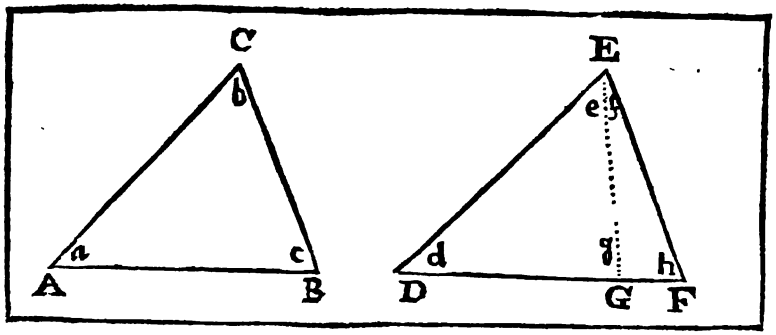
Dahero auch der ∠ c ⌈ ſeyn werde, dem ∠ f. d. 4. l.
der ∠ c aber iſt anfangs geſetzt worden ⌈, dem ∠ g + f.

Deßwegen unmöglich iſt, daß der ∠ c zugleich dem Theil f. und dem gantzen g + f auff einmal gleich ſeyn ſolte.

Darauß man ſchlieſſet, daß die Seiten AC nicht kürtzer, als DE ſeye: Gröſſer kan ſie auch nicht ſeyn, ſonſten man eben in dergleichen Unmöglichkeit fahlete.

Dahero ſchlieſſet man, daß geſtalt ſolcher Sachen, die beyde Seiten eines Triangels denen beyden Seiten deß andern, und letzlich der dritte Winckel eines, dem dritten Winckel deß andern gleich, und ſo fort der gantze Triangel ABC d. 8. l. gleich dem gantzen Triangel DEF ſeye.

Welches zum erſten zu beweiſen ware.



In dem anderten Fall.

Seye die Seiten AC, ſo von dem ∠ c unterſpannet wird, gleich der Seiten DE, welche auch von dem gleichen ∠ h unterſpannet iſt, (und wie vorgehends) ſeye auch der ∠ a ⊓ dem ∠ d.

So ſage ich, daß auch die zwo übrige Seiten CB und AB ⊓ ſeyn werden, denen zwo übrigen Seiten EF, und DF. und der ∠ b ⊓, dem ∠ e + f.

Solte man es nicht geſtehen, ſondern einwenden, es wäre AB ⌝, als DF.

So mache, (wan es möglich iſt) DG ⊓, AB.

Beweiß.

Dieweilen die zwo Seiten AC, und AB ⊓ ſeyn, denen zwo Seiten DE, und DG: und der ∠ a ⊓, dem ∠ d. — d. d. Vorg. / d. d. Zub.

So wird auch der ∠ c ⊓ ſeyn dem ∠ g. — d. 4. 1.

Der ∠ c aber iſt anfangs ⊓ geſetzet worden, dem ∠ h. — d. d. Vorg.

Dahero der ∠ g auch ⊓ iſt, dem ∠ h, nemlich — d. 1. ax.

Der äuſſerliche den innerlichen, ſo nicht ſeyn kan. — d. 16. 1.

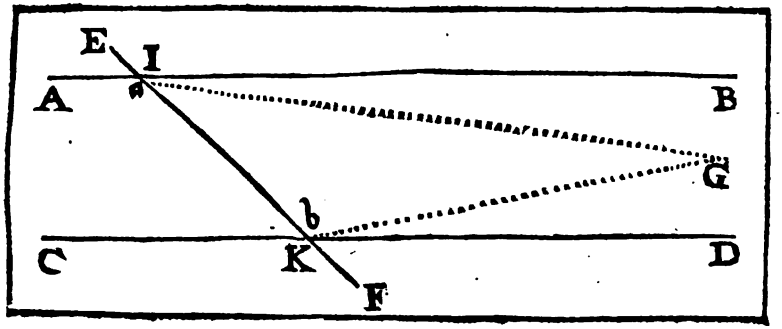
Darumb iſt die Seiten AB nicht ⌝, als die Seiten DF.

Sie kan auch nicht ⌜ ſeyn, als DF. ſonſten käme man in die erſte Unmöglichkeit hinein.

Darauß iſt dann zu ſchlieſſen, daß die zwo Seiten AB und CB ⊓ ſeynd denen zwo Seiten DF und EF, auch der ∠ b ⊓, dem ∠ e + f.

Und alſo der gantze △ ABC ⊓, dem gantzen △ DEF.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXVII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn eine gerade Linie (EF) über zwo andere gerade Linien (AB, CD) überzwerg gezogen wird, und die Winckeln (a und b) umwexlender Weiſe einander gleich machet: ſo werden ſolche zwo Linien (AB, CD) einander Parallel, oder gleichlauffend ſeyn.

Beweiß.

Geſetzt, man ſagete, daß die Linie AB nicht = wäre der Linie CD. ſo müſſen ſie nothwendig einmal zuſammen kommen. d. II. ax. I.

Seye dann ein ſolcher Punct, daran ſie zuſammen kommen mögten, (wann es möglich iſt) in G.

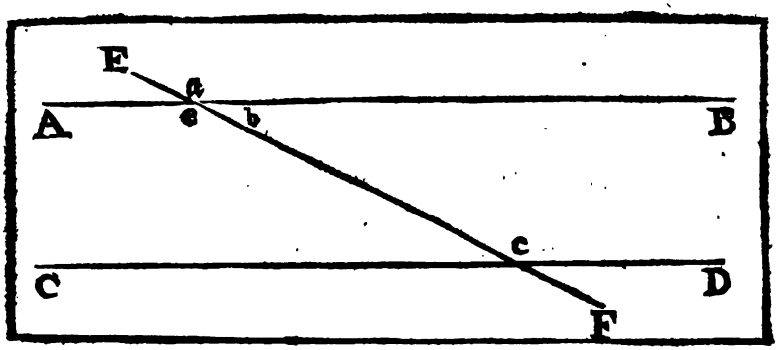
So erwächſet darauß (weilen ſie gerade Linien ſeynd) ein △ IGK, deſſen außwendiger ∠ a ⌐ ſeyn wird, als der inwendige ∠ b. d. 16. I.

Der ∠ b aber iſt ⌐ geſetzt worden dem ∠ a. d. d. Vorg.

Folgete, daß der ∠ b auff einmahln ⌐, und ¬ wäre, als der ∠ a: welches nicht möglich iſt.

Dahero iſt es eine Warheit, daß, wann über zwo gerade Linien eine andere überzwerg gezogen wird, und die Winckeln umwexlender Weiſe einander gleich machet, ſolche Linien niemahlen in einem Punct zuſammen kommen, ſondern jederzeit einander Parallel, oder gleich weit lauffen werden.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn über zwo gerade Linien (AB, und CD) eine andere gerade Linie (EF) überzwerg gezogen wird, und den äuſſern Winckel (a) gleich machet dem innern (c), ſo ihme auff derſelben Seite entgegen ſtehet; oder die zween innerliche Winckeln (b und c), ſo auff einer Seiten gegen einander ſtehen, zweyen rechten Winckeln gleich machet: ſo werden ſolche zwo Linien einander Parallel ſeyn.

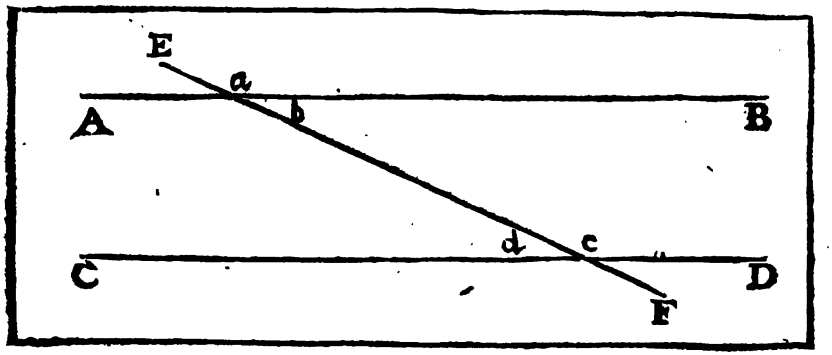
Beweiß.

I.

Der ∠ c iſt □, dem ∠ a. — 15. d. Vorg.
der ∠ a aber iſt □, dem ∠ c. — d. 15. 1.
Darumb wird auch der unwexlende ∠ c □ ſeyn, dem ∠ e. — d. 1. ax.
und folgends die Linie AB ═ ſeyn, der Linie CD. — d. 27. 1.

II.

Die ∠ a und b ſeynd □, zween rechten Winckeln. — d. 13. 1.
Der ∠ b, und ∠ c ſeynd auch □, zween Rechten Winckeln. — d. d. Vorg.
Wenn man nun beyderſeits den gemeinen ∠ b darvon ziehet,
ſo wird verbleiben der ∠ a □, dem ∠ c. — d. 3. ax.
Dahero wird durch den bewieſenen erſten Theil dieſer Vorgab
(weilen der ∠ a □ iſt dem ∠ c)
Die Linie AB ═ ſeyn, der Linie CD.
Welches zu beweiſen ware.



Die XXIX. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn über zwo gerade Parallel-Linien (AB und CD) eine andere gerade Linie (EF) überzwerg gezogen wird: ſo machet ſie erſtlich die zween Winckel (b und d) umwexlender Weiſe einander gleich; alsdann auch die zween innerliche Winckel (b und c), ſo auff einer Seiten gegen einander ſtehen, gleich zweyen rechten; letzlich den äuſſern Winckel (a) gleich, dem innern (c), der ihme auff derſelben Seiten entgegen ſtehet.

Beweiß.

I.

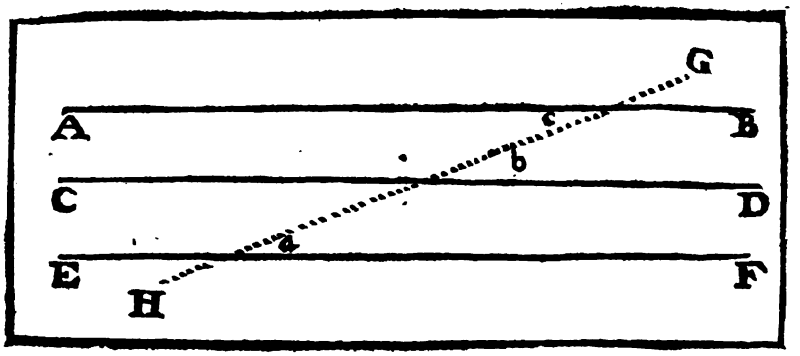
Weilen AB ═ gegeben iſt, der CD. — d. d. Vorg.
So muß nothwendig der ∠ b ⊓ ſeyn, dem ∠ d. — d. 27. I.
Sonſten kommeten ſie in einem Punct zuſammen. — xi. ax. I.

II.

Der ∠ b iſt ⊓, dem ∠ d. — d. d. 1. Theil.
ſetze hinzu beyderſeits den gemeinen ∠ c.
So werden die ∠ b und c ⊓ ſeyn, denen zween ∠ d + c.
Die zween ∠ d + c ſeynd aber ⊓, zween rechten ∠. — d. 13. I.
Darum werden auch die zwey ∠ b und c ⊓ ſeyn, zween rechten ∠.

III.

Die zween ∠ b und c ſeynd ⊓, zweyen rechten ∠. — d. d. 2. Theil.
Item die zween ∠ a und b ſeynd ⊓, zweyen rechten ∠. — d. 13. I.
Wenn man beyderſeits den gemeinen ∠ b abziehet,
So wird überbleiben der ∠ a ⊓, dem ∠ c.
Welches zu beweiſen ware.



Die XXX. Vorgab.

Betrachtung.

Die gerade Linien (AB und EF), welche einer andern geraden Linie (CD) Parallel ſeynd; dieſe ſeynd auch unter einander Parallel.

Zubereitung.

Ziehe überzwerg die gerade Linie GH.

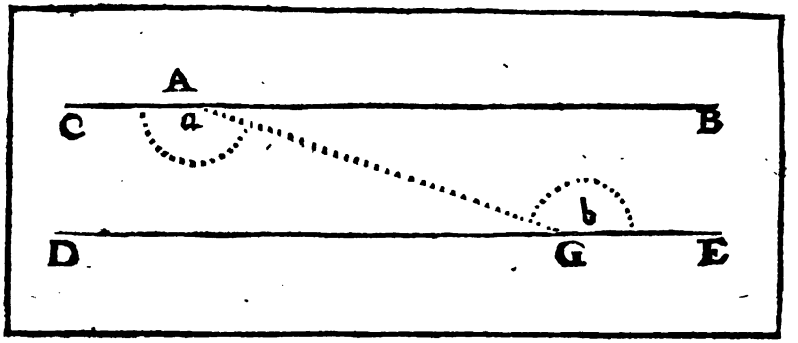
Beweiß.

Dieweilen AB ═ iſt, der Linie CD. d. d. Vorg.
ſo wird der ∠ c ⊓ ſeyn, dem ∠ b. d. 29. 1.

Item, weilen EF ═ iſt, der Linie CD, d. d. Vorg.
ſo wird auch der ∠ a ⊓ ſeyn, dem ∠ b. d. 29. 1.
und dahero wird auch der ∠ a ⊓ ſeyn, dem ∠ c. d. 1. ax.

Worauf folget, daß die Linie AB ═ ſeye, der Linie EF. d. 27. 1.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXI. Vorgab.

Handgriff.

Auß einem gegebenen Puncten (A) eine gerade Linie (CB) zu ziehen, welche einer gegebenen geraden Linie (DE) Parallel lauffe.

Handgriff.

Ziehe auß dem Punct A eine gerade Linie AG, welche mit der gegebenen DE einen ∠ b nach Gefallen mache.

Hernach mache den ∠ a ⊓, dem ∠ b. d. 23. I.

Und ziehe dardurch die gerade Linie CAB,

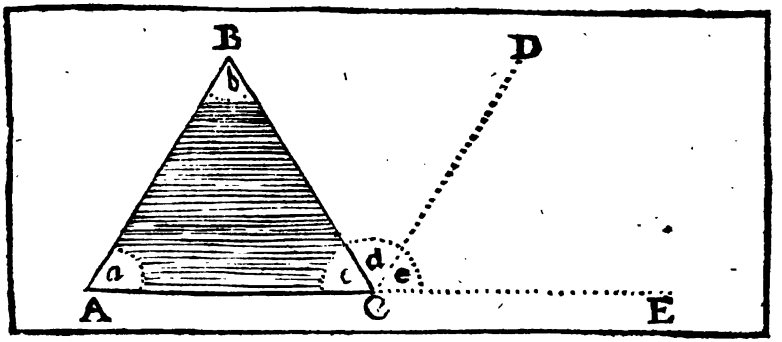
Welche mit der gegebenen Linie DE Parallel lauffen werde.

Beweiß.

Dieweilen die zween ∠ a und b umwexlender Weiſe einander gleich ſeynd gemacht worden.

So folget, daß die gerade Linie CB = lauffe, der Linie DE, d. 27. I.

Welches zu machen ware.



Die XXXII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann nach Gefallen eine Seiten (AC) eines Triangels (ABC) verlängert wird (gleich wie in E) ſo wird der äuſſere Winckel (d + e) gleich ſeyn denen zween Winckeln (b und a) welche innerhalb deß Triangels dieſem entgegen ſtehen; und in einem jedwedern Triangel ſeynd die drey innere Winckel (a, b, c,) ſammentlich, gleich zween Rechten.

Zubereitung.

Ziehe auß C die gerade Linie CD, Welche = lauffe der Seiten AB. — b. 31. I.

Beweiß.

Dieweiley die gerade Linie BC über die zwo Paralle'-Linien AB, und CD überzwerg iſt gezogen worden, ſo wird dardurch der ∠ b ⊓ ſeyn, dem ∠ d. — b. 29. I.

Abermahln, indeme wiederumb über die zwo Parallel-Linien AB, und CD die gerade Linie, ACE gehet,

So wird auch der ∠ a ⊓ ſeyn, dem ∠ e. — b. 29. I.

Dahero werden dann beyde ∠ b und a ⊓ ſeyn, dem äuſſern ∠ d + e.

II.

Der ∠ d + e iſt ⊓, denen zween ∠ a und b. — b. b. Vorg.

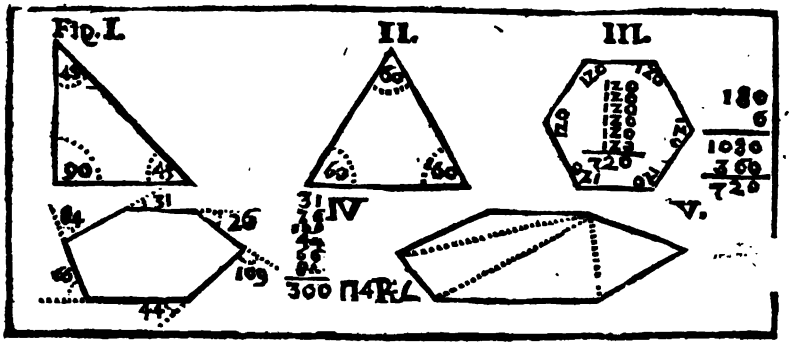
ſetze beyderſeits hinzu den gemeinen ∠ c.

So werden die drey ∠ a, b, c ⊓ ſeyn, denen ∠ d + e und c.

Die ∠ d + e und c ſeynd aber ⊓ zween rechten ∠. — b. 13. I.

Folget, daß auch die drey ∠ a, b, c zuſammen, ⊓ ſeynd, zween rechten Winckeln.

Welches zu beweiſen ware.



Folge.

I.

Drey Winckeln ſammentlich in einem △, ſeynd □, denen drey ∠ ſammentlich in einem andern △.

Und wenn zween ∠ eines △ □ ſeynd, zween ∠ eines andern △: So wird auch der übrige ∠ □ ſeyn, dem übrigen dritten ∠ deß andern △.

II.

In einem Rechtwincklichten △, welcher zwo gleiche Seiten hat, werden die andern zween Winckel halb Rechte ſeyn, das iſt, ein jeder von dieſen wird 45. Grad halten, Fig. I.

III.

In einem gleichſeitigen △ gelten ein jeder Winckel $\frac{2}{3}$ von zween Rechten, daß iſt 60. Grad. Fig. II.

Anmerkung.

I.

In einer geradliniſchen Figur machen alle innerliche Winckeln ſammentlich zweymaln ſo viel Rechte ∠ (weniger vier Rechte) als die Figur Seiten hat. Fig. III.

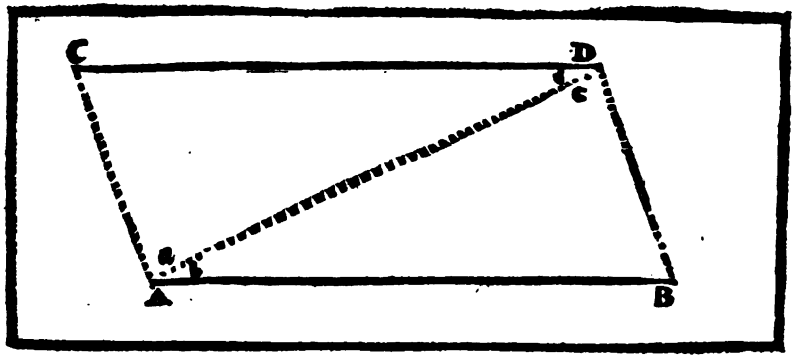
II.

Alle äuſſere Winckeln einer geradliniſchen Figur machen ſammentlich nicht mehr, als nur vier rechte Winckel. Fig. IV.

III.

Eine geradliniſche Figur wird auß einem innern Winckel in ſo viel △, weniger zwey, als die Figur Seiten hat, abgetheilet:

Und die Winckeln ſammentlich deren △ machen eben ſo viel, als alle Winckeln ſammentlich der gegebenen Figur. Fig. V.



Die XXXIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwo gerade Linien (AB, CD), welche andere zwo gerade Linien AC, BD), welche einander gleich und Parallel ſeynd, an beyde Seiten zuſammen hängen, ſo ſeynd dieſelbe auch einander gleich, und Parallel. (das iſt, AB wird gleich, und Parallel ſeyn, der Linie CD.

Zubereitung.

Ziehe die beyde überzwerg ſtehende Ende A, D, derer Parallel-Linien AC, BD mit einer geraden AD zuſammen.

Beweiß.

Weilen die gerade Linie AD überzwerg über die zwo Parallels Linien AC, BD ſtehet:

So wird in dem △ ACD der ∠ a ⊓ ſeyn, dem ∠ c in dem △ ABD. d. 29. I.

Die Seiten AC iſt auch ⊓ geſetzt worden, der Seiten BD. d. d. Vorg.

und die Seiten AD iſt beyden △ gemein.

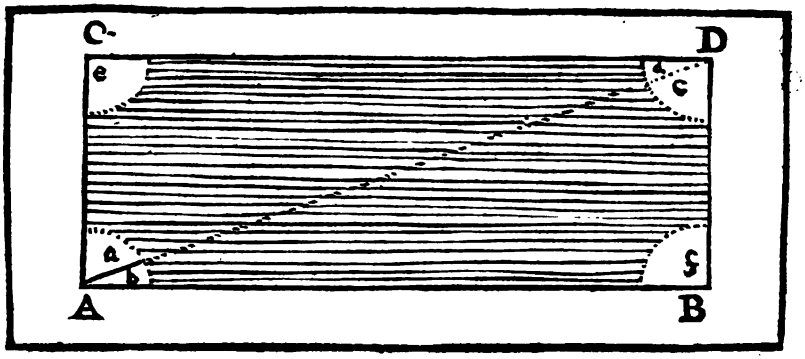
Dahero wird auch die Baſis CD ⊓ ſeyn, der Baſis AB, d. 4. I.

und der ∠ d ⊓, dem ∠ b.

Dieſe ∠ d und b aber ſtehen gegen einander umwexlender Weiſe.

Deßwegen wird auch die Linie CD = ſeyn, der Linie AB. d. 27. I.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXIV. Vorgab.

Betrachtung.

In allen Parallelogrammen ſeynd die Seiten AB, CD, und AC, BD), ſo gegen einander über ſtehen, und auch die Winckel über Ecke (a + b und d + c, oder e und f) einander gleich; und ſchneidet der Diameter (AD) ein jedes Parallelogram in zwey gleiche Theile, oder Triangeln.

Beweiß.

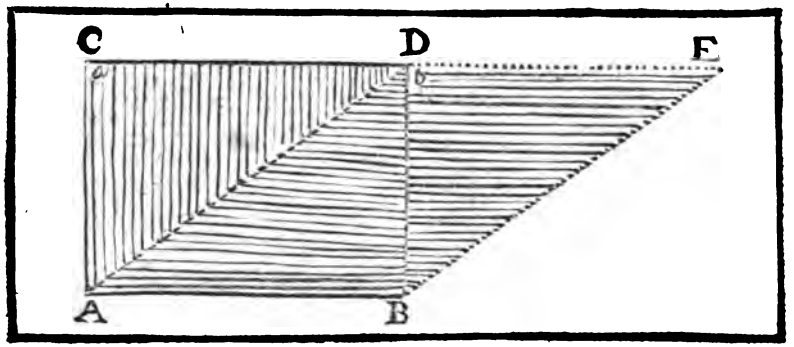
Dieweilen AB ═ iſt der CD, und AC ═ der BD: ſo wird der ∠ d ⊓ ſeyn, dem ∠ b. und der ∠ c ⊓, dem ∠ a. Nemlich die Winckel umwexlender Weiſe, — d. 35. def. I. — d. 29. I.

Dahero wird in denen △ ACD, und ABD, (weilen der ∠ a ⊓ iſt, dem ∠ c, und der ∠ d ⊓, dem ∠ b, und die Seiten AD beyden △ gemein) auch der dritte ∠ e ⊓ ſeyn, dem vierten ∠ f. — d. d. Vor. — d. 26. I.

Und folgends die Seiten DC, CA ⊓ ſeyn, denen Seiten AB, BD. Welches das erſte zu beweiſen ware.

Hernach, weilen der gantze △ ACD ⊓ iſt, dem gantzen △ ABD. ſo ſchlieſſet man billich darauß, daß der gezogene Diameter AD, das Parallelogram ABCD gleich entzwey geſchnitten habe. — d. d. Vor.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXV. Vorgab.

Betrachtung.

Die Parallelogramen (CB, AE), ſo auff einerley Baſis (AB,) und zwiſchen zweyen Parallel-Linien (AB, CE) ſtehen, die ſeynd einander gleich.

Mercke, daß man in dieſer Vorgab nicht verſtehe, als wann die zwey Parallelogrammen gleiche Winckeln, und Seiten hätten, ſondern man ſaget nur, daß ſie gleiche Inhalt begreiffen.

Dreyerley Fähle, wegen unterſchiedlicher Stellung, können ſich hierinnen begeben.

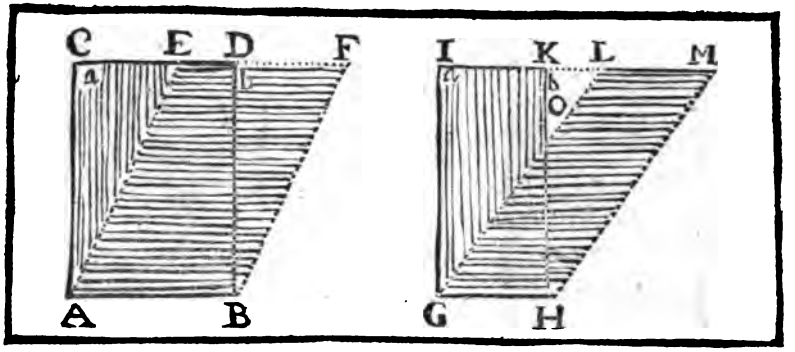
1. Wann das andere ▭ mit einer Seiten ED hart an die Seiten CD deß erſten ▭ ſtoſſet.

Beweiß.

Betrachte die drey △ ACD, BDE, und ADB.

Hernach ſage, weilen die Seiten DE ∩ iſt, der Seiten AB,	d. 34. 1.
AB aber ∩ iſt der Seiten CD.	d. 34. 1.
ſo wird auch die Seiten DE ∩ ſeyn, der Seiten CD.	d. 1. ax.
Unterdeſſen iſt die Seiten BD ∩, der Seiten AC.	d. 34. 1.
Und der äuſſere ∠ b ∩, dem innern ∠ a. (dann AB = iſt, der CD)	d. 35. def. 1. und 29. 1.
Deßwegen wird der △ BDE ∩ ſeyn, dem △ ACD.	d. 4. 1.
Setze hinzu beyderſeits den gemeinen △ ADB,	
So werden die zwey ▭ ADEB, und ACDB darauß entſtehen,	
Welche auch einander ∩ ſeyn werden.	d. 2. ax.

Welches zu beweiſen ware.



II.

Wenn das andere ▭ mit einer Seiten FE in der Seiten CD deß erſten lieget.

Beweiß.

Die Seiten CD iſt ⊓, der Seiten AB; und AB iſt ⊓ der EF. d. 34. I.
Folget, daß auch CD ⊓ ſeye der EF. d. 1. ax.
Ziehe darvon ab beyderſeits die gemeine Linie ED.
ſo wird überbleiben CE ⊓ DF. d. 3. ax.
Wiederumb iſt die Seiten AC ⊓, der Seiten BD, d. 34. I.
und der ∠a ⊓ dem ∠b. d. 29. I. und 35. def. I.

Darumb wird der △ ACE ⊓ ſeyn, dem △ BDF. d. 4. I.
Setze hinzu beyderſeits das gemeine Trapezium ABDE.
So wird das ▭ ABCD ⊓ ſeyn, dem ▭ ABFE.

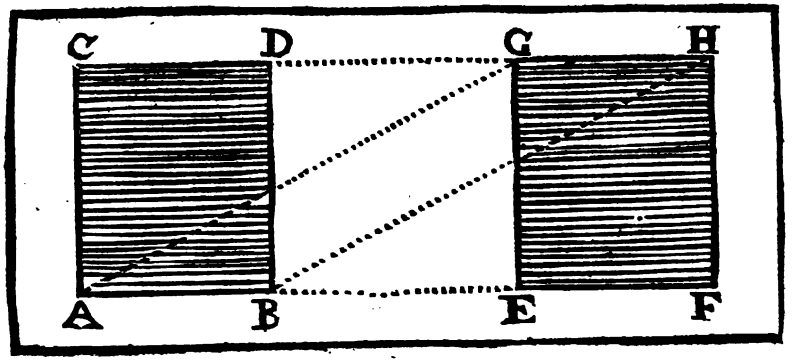
III.

Wenn das andere ▭ mit einer Seiten LM völlig auſſer der erſten Seiten IK lieget.

Beweiß.

Wie ſchon in dem vorhergehenden bewieſen worden iſt, wird IK ⊓ ſeyn der LM.
Setze nun beyderſeits hinzu die Linie KL.
So wird die gantze Linie IL ⊓ ſeyn, der gantzen Linie KM. d. 2. ax.
Unterdeſſen iſt IG ⊓ der KH, und der ∠a ⊓, dem ∠b. d. 34. I. d. 29. I.

Folget dahero, daß der △ GIL ⊓ ſeye, dem △ HKM. d. 4. I.
Ziehe nun beyderſeits ab den gemeinen △ KOL.
So wird überbleiben das Trapezium GOKI ⊓ dem
Trapezium HOLM.
Setze unterdeſſen beyderſeits hinzu den gemeinen △ GOH,
So wird endlich das ▭ GHIK ⊓ ſeyn, dem ▭ GHLM.
Welches zu machen ware.



Die XXXVI. Vorgab.

Betrachtung.

Die Parallelogrammen (CB, GF) ſo gleiche Baſes (AB, EF) haben, und zwiſchen einerley Parallel-Linien (AF, CH) ligen: die haben einen gleichgroſſen Inhalt.

Zubereitung.

Ziehe AG, BH mit geraden Linien zuſammen, ſo entſtehet das □ ABGH.

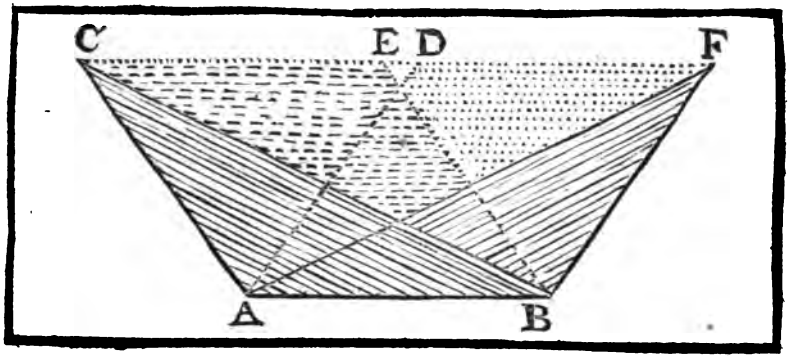
Beweiß.

Das □ ABCD iſt ⊓, dem □ ABHG, d. 35. I.

Das □ ABHG aber iſt ⊓, dem □ EFHG, d. 35. I.

Dahero wird auch das □ ABCD ⊓ ſeyn, dem □ EFGH. d. I. ax.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXVII. Vorgab.

Betrachtung.

Alle Triangel (als wie ACB, und ABF), welche auff einerley Baſis (AB) und in einerley Parallel-Linien (AB, CF) ſtehen; die ſeynd einander gleich (oder ſo ein Ding), ſie begreiffen einen gleichen Inhalt.

Zubereitung.

Ziehe auß B die Linie BE, welche = laufft mit AC,

Und AD, welche = lauffe mit BF. d. 31. 1.

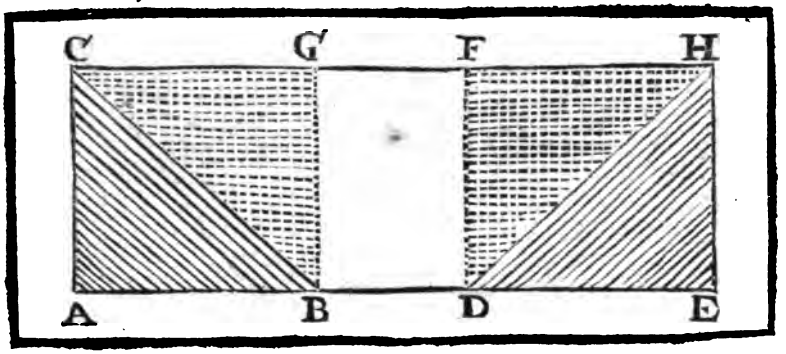
Beweiß.

Das □ ABCE iſt ⊓ dem □ ABDF. d. 35. 1.

Die △ ABC, und ABF ſeynd aber gerade die Helffte deren beyden gleichen □ ABCE, und ABDF. d. 34. 1.

Darum wird der △ ABC ⊓ ſeyn, dem △ ABF. d. 7. ax.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Alle Triangel (als wie ACB, DEH), ſo auff gleichen Baſes (AB, DE), und zwiſchen einerley Pgrallel-Linien (AE, CH) ſtehen, die ſeynd einander gleich.

Zubereitung.

Auß dem Punct B, ziehe die gerade Linie BG = , AC. d. 31. I.

Und auß dem Punct D, die Linie DF = EH.

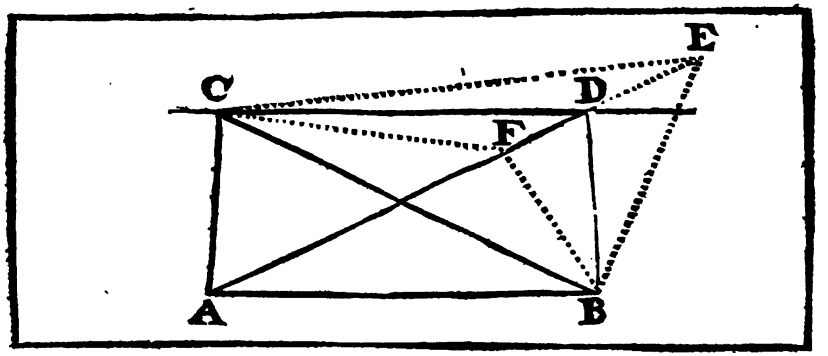
Beweiß.

Das ▭ ABCG, iſt ⊓, dem ▭ DEFH, d. 36. I.

Ihre Helffte aber ſeynd die △ ABC, und DEH. d. 34. I.

Dahero wird auch der △ ABC ⊓ ſeyn, dem △ DEH. d. 7. ax.

Welches zu beweiſen ware.



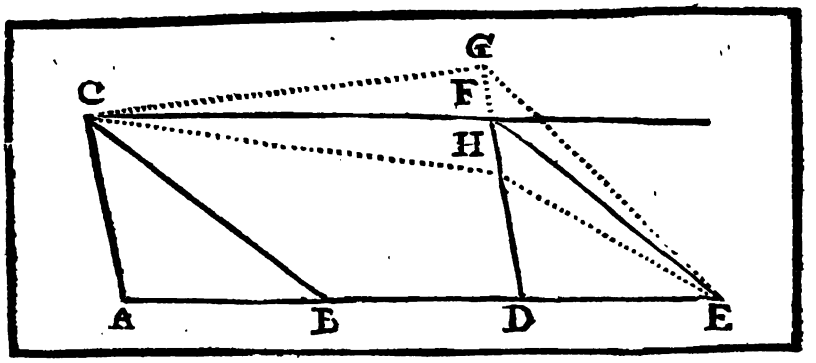
Die XXXX. Vorgab.

Betrachtung.

Die Triangeln gleiches Inhalts (ABC, ABD) welche auff einerley Baſis (AB), und auff einerley Seiten hinaußwerts ſtehen: die ſtehen zwiſchen einerley Parallel-Linien (das iſt CD wird Parallel lauffen mit AB).

Beweiß.

Geſetzt es wäre CD nicht = AB, ſondern es wäre eine andere gerade Linie, gleich wie CE (wann es doch möglich iſt) = der Linie AB.
So verlängere AD biß an die vermeinte = Linie in dem Punct E, und ziehe B und E zuſammen.
Demnach wird der △ ACB □, ſeyn dem △ AEB. d. 37. 1.
Dem △ ACB aber iſt □ geſetzt worden, der △ ADB, d. d. Vorg.
Folget, daß der △ ADB, auch gleich wäre, dem △ AEB. d. 1. ax.
Nemlich ein Theil □, ſeinem gantzen.
Welches wider die Vernunfft ſtreitet. d. 9. ax.
Darumb iſt nicht CE, ſondern die CD iſt noch = der AB.
Solte man weiter ſetzen, daß die gerade CF = wäre, der Linie AB ſo würde es eben wider die Vernunfft herauß kommen: daß nemlich das gantze □ wäre, einem von ſeinen Theilen.
Dahero iſt es beſtändig wahr, daß CD = ſeye der AB.
Welches zu beweiſen ware.



Die XL. Vorgab.

Betrachtung.

Die Triangeln gleiches Inhalts (ABC, DEF), ſo auff gleichen Baſes (AB, DE) und auff einerley Seiten hinaußwerts ſtehen: die ſtehen auch in einerley Parallel-Linien (das iſt CF wird Parallel ſeyn der AE).

Beweiß.

Solte CF nicht = der AB ſeyn, ſondern eine andere, als wie CG (wann es möglich iſt)

So verlängere DF in die vermeinte Parallel im Puncten G, und ziehe GE zuſammen.

Darauff folget, daß der △ ABC ⊓ ſeye dem △ DGE, d. 38. I.
Der △ ABC aber iſt ⊓ geſetzt worden, dem △ FDE. d. d. Vorg.

Darumb wird auch der △ DEF ⊓ ſeyn müſſen dem △ DEG. d. 1. ax.
Welches wider die Vernunfft iſt, daß ein Theil ⊓ ſeye, ſeinem Gantzen.

Dahero ſaget man noch, daß CF allein = ſeye, der AE.

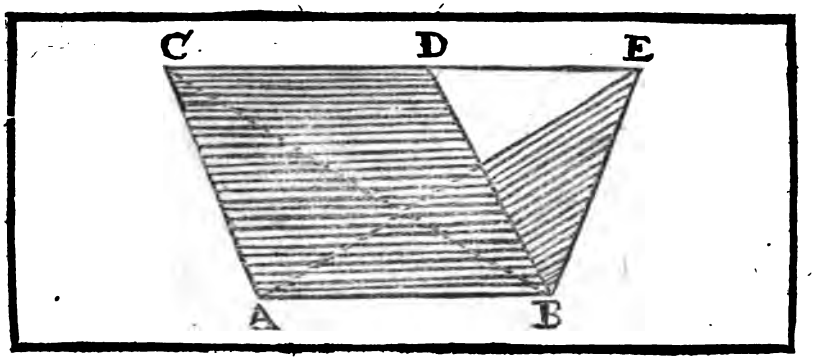
Würde aber ein anderer einwerffen, daß CH = wäre, der AE.

So kommete eben ſelbe Unmöglichkeit herauß, nemlich,

Daß ein gantzes ⊓ wäre, einem von ſeinen Theilen,

Alſo iſt es eine unfehlbare Warheit, daß die Linie CF allein der Linie AE = ſeye.

Welches zu beweiſen ware.



Die XLI. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn ein Parallelogram (ABCD) mit einem Triangel (ABE) eine gemeine Baſis (AB) hat, und zwiſchen einerley Parallel-Linien (AB, CE) ſtehen: ſo wird das Parallelogram noch einmal, oder doppelt ſo groß ſeyn, als der Triangel.

Zubereitung.

Ziehe den Diameter CB.

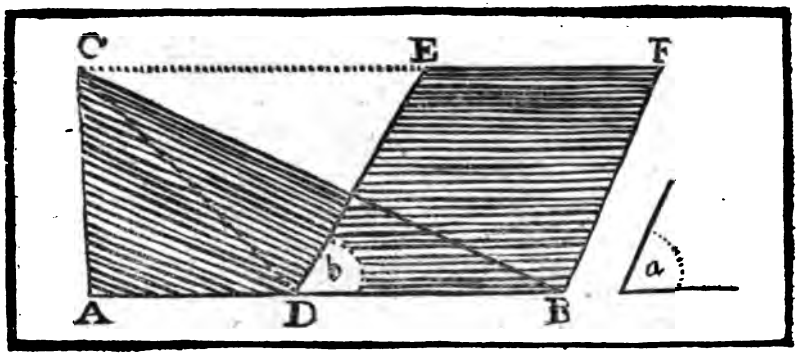
Beweiß.

Der △ ABE iſt ▭, dem △ ABC. d. 37. I.

Daß ▭ ABCD aber iſt doppelt, oder noch einmahln ſo groß als der △ ABC. d. 34. I.

Folget, daß auch das ▭ ABCD doppelt, oder noch einmahln ſo groß ſeye, als der △ ABE.

Welches zu beweiſen ware.



Die XLII. Vorgab.

Handgriff.

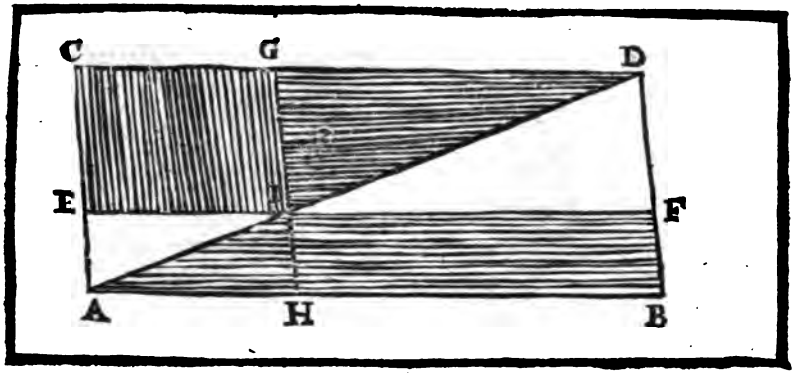
Einem vorgegebenen Triangel (ABC) ein gleiches Parallelogram (DBEF) zu machen, alſo, daß ein Winckel (b) gleich ſeye, einem andern vorgegebenen geradliniſchen Winckel (a).

Handgriff.

Zertheile die Baſis AB mitten entzwey in D. — 10. I.
Ziehe CD zuſammen.
Auß C ziehe CF = der Baſis AB. — 31. I.
Mache auß dem Punct D mit der Linie DE.
den ∠ b ⊓, dem ∠ a. — 23. I.
Ziehe auß B die Linie BF = der Linie DE. — 31. I.
So wird das gemachte ▭ DBEF ⊓ ſeyn, dem △ ABC.
und den ∠ b ⊓ haben, dem vorgegebenen ∠ a.

Beweiß.

Der △ ACD iſt ⊓, dem △ DCB. — 38. I.
Dahero wird der △ DCB gerad die Helffte von dem △ ABC ſeyn.
Unterdeſſen iſt derſelbe △ DCB auch gerad die Helffte von dem ▭ DEFB. — 41. I. und 41. I.
Dahero wird der gantze △ ABC ⊓ ſeyn, dem gemachten ▭ DEFB. — 6. ax.
Deſſen ∠ b auch ⊓ iſt, dem gegebenen ∠ a. — 1. Hand.
Welches zu machen ware.



Die XLIII. Vorgab.

Betrachtung.

In allen Parallelogramen (als wie ABCD) ſeynd die Complementen, oder Außfüllungen (als wie HBIF, EICG) einander gleich.

Beweiß.

Weilen der Diameter AD das ▭ ABCD gerad entzwey theilet. so wird der △ ACD ⊓ ſeyn, dem △ ABD. b. 34. 1.

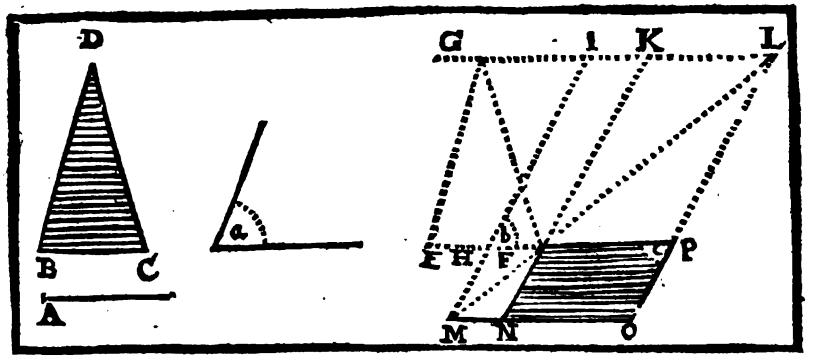
Eben auff ſolche Art, indeme die ▭ HE und FG gerade entzwey durch ihre Diametern AI, und ID geſchnitten werden.

So wird der △ AEI ⊓ ſeyn, dem △ AHI, und der △ IGD ⊓, dem △ IFD.

Wann man nun von denen zwey groſſen und gleichen △ ACD und ABD beyderſeits, erſtlich die zwey gleiche △ AEI und AHI; alsdann auch die zwey gleiche △ IGD, und IFD, abziehet.

So iſt klar, daß über bleiben werde die Außfüllung EIGC ⊓, der Außfüllung HBFI.

Welches zu beweiſen ware.



Die XLIV. Vorgab. Handgriff.

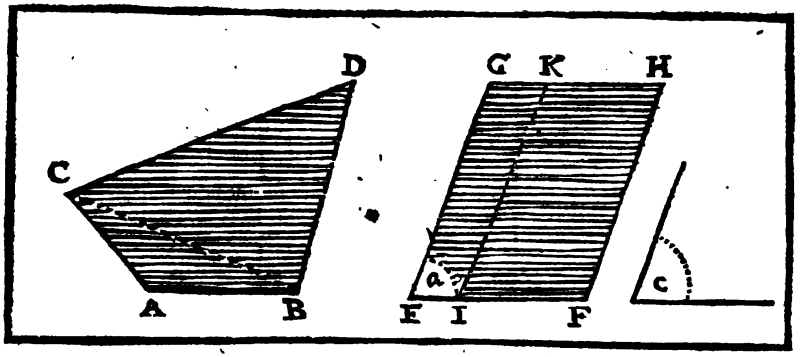
Auff einer vorgegebenen geraden Linie (A) ein Parallelogram (NPOF) gleich groß einem vorgegebenen Triangel (BCD) zu machen, welches auch einen Winckel (c) gleich einem andern fürgegebenen geradliniſchen Winckel (a) habe.

Handgriff.

Mache den △ EFG ⊓, dem △ BCD. d. 22. I.
Das ▭ HFIK mache ⊓, dem △ EFG,
Welches den ∠ b ⊓ habe, dem vorgegebenen ∠ a. d. 42. I.
Verlängere EF, und mache FP ⊓, der Linie A.
Auß P ziehe die Linie PL = der FK, d. 31. I.
Welche die verlängte GIK im Punct L durchſchneide.
Auß dem Punct L, und durch den Punct F ziehe den Diameter LF, biß er die verlängte IH durchſchneide in dem Punct M.
Auß dem Punct M ziehe die Linie MO = der Linie HP, d. 31. I.
Welche die verlängte LP durchſchneide im Punct O.
Unterdeſſen verlängere KF biß in Punct N.
So wird das ▭ NOFP ⊓ gemacht worden ſeyn,
Dem △ EFG, oder dem gleichen △ BDC,
und der ∠ c ⊓, dem ∠ a;
und die Linie FP ⊓ der Linie A.

Beweiß.

Die Außfüllung FO iſt ⊓, der Außfüllung FI. d. 43. I.
Das ▭, oder Außfüllung FI iſt ⊓ gemacht worden,
dem △ EFG, oder BCD. d. d. Hand.
Darumb wird die Außfüllung, oder ▭ FO ⊓ ſeyn,
dem vorgegebenen △ BCD.
So hat es auch die Seite FP, und NO ⊓, der Linie A, und den
∠ c ⊓ dem ∠ a. d. d. Hand.
(dann der ∠ c iſt ⊓ dem ∠ b, d. 29. I.
und der ∠ b iſt ⊓ gemacht worden, dem ∠ a.
Welches zu machen ware.



Die XLV. Vorgab.

Handgriff.

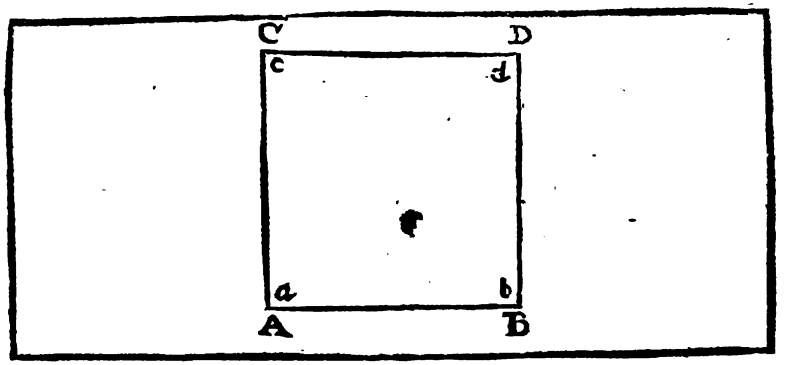
Ein Parallelogram (GF) zu machen, welches einer andern vorgegebenen geradliniſchen Figur (ABDC) gleich ſeye, und einen Winckel (a) gleich einem andern vorgegebenen geradliniſchen Winckel (c) habe.

Handgriff.

Zertheile die geradliniſche Figur in lauter △.
nemlich in den △ ABC, und BCD.
Mache das □ GI ⊓, dem △ ABC, d. 42. 1.
Welches den ∠ a ⊓ habe, dem vorgegebenen ∠ c.
Verlängere EI, und mache auff IK das □ KF ⊓, dem △ BCD, d. 44. 1.
So wird das groſſe □ EGHF darauß entſpringen,
Welches ⊓ iſt der vorgegebenen Figur ABCD.

Beweiß.

Das □ GEIK iſt ⊓, dem △ ABC,
und das □ KIFH iſt ⊓, dem △ BCD. } d. d. Hand.
Die zwey △ ABC, und BCD machen aber die Figur ABCD:
und die zwey □ GI, KF machen auch das groſſe und
einige □ EFGH.
Dahero folget, daß das □ EH ⊓ ſeye, der vorgegebenen
geradliniſchen Figur ABCD
ſo iſt auch der ∠ a ⊓, gemacht worden dem ∠ c. d. d. Hand.
Welches zu machen ware.



Die XLVI. Vorgab. Handgriff.

Auff einer gegebenen geraden Linie (AB) ein Quadrat, oder gleiches Vier-Eck (ABCD) zu machen.

Handgriff.

An beyden Enden A und B erhöhe zwo ⊥ AC, und BD, welche gleich lang seyn müssen, der Linie AB. — d. 11. 1.
Ziehe zusammen die Puncten CD mit einer geraden Linie.
so ist das □ ABCD verfertiget.

Beweiß.

Die ∠ a, und b seynd zween rechte ∠. — d. d. Hand.
darum ist AC = der BD. — d. 28.
Die Linie AC ist ⊓ der Linie BD. — d. d. Hand.
Dahero wird die Linie CD = seyn, der Linie AB, — d. 33. 1.
und folgends wird AD ein ▭ seyn. — d. 35 def. 1.
Weilen aber die zwo Seiten CA, BD ⊓ seynd gemacht worden der dritten Seiten AB.
und auch CD, ohne das ⊓ ist der Seiten AB. — d. 34. 1.
So wird dann AD ein gleichseitiges ▭ seyn,
Unterdessen seynd die ∠ a und b zwey Rechte, — d. d. Hand.
Dahero werden auch die überstehende zwey ∠ c und d zwey Rechte seyn. d. 34. 1.
Und deßwegen wird AD ein □ oder Vier-Eck seyn, — d. 29. def. 1.
Welches zu machen ware.

Anmerckung. I.

Ein jedes ▭, welches umb einen rechten ∠ zwey gleich lange Seiten hat, ist ein □.

II.

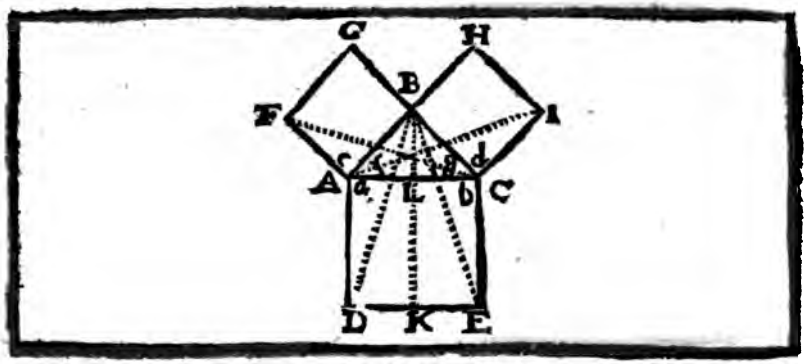
In einem jeden ▭, welches einen Rechten ∠ hat, werden auch die übrige dreye ∠ Rechte seyn.

III.

Auff gleich geraden Linien, seynd die darauff gemachte □ einander gleich groß.

IV.

Gleich grosse □, das ist, welche einen gleichen Inhalt begreiffen, stehen auff gleich geraden Linien.



Die XLVII. Vorgab.

Betrachtung.

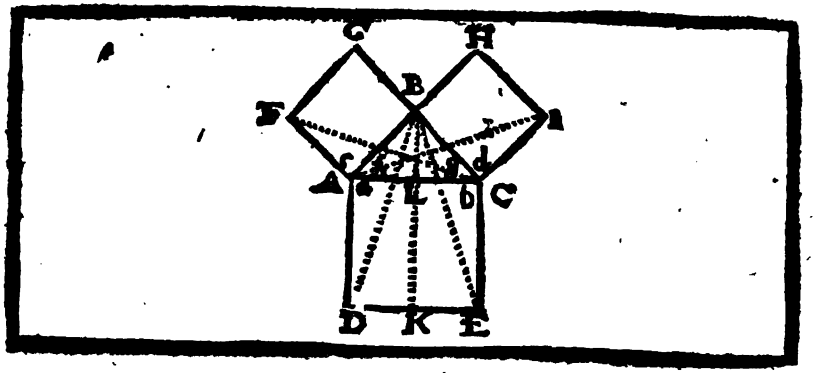
In dem Rechtwinckiichten Triangel (als wie ABC) iſt das Quadrat (AE) auf der Seiten (AC), welche den Rechten Winkel (ABC) unterſpannet; gleich ſo groß, als die zwey Quadraten (CH, und AG), welche auf denen zwey andern Seiten (AB, BC), ſo den rechten Winckel beſchlieſſen, gemacht werden.

Zubereitung.

Auß dem Punct B ziehe die gerade Linie BK ═, der AD oder CE. d. 31. 1.
Ziehe zuſammen mit geraden Linien AI, CF, DB, und EB.

Beweiß.

Der ∠ b iſt ⊓, dem ∠ d.
(dann wegen deren □, AE, CH, beyde ∠ rechte ſeynd.)
Setze beyderſeits hinzu den gemeinen ∠ g.
So wird auch der ∠ b + g ⊓ ſeyn, dem ∠ d + g.
Nunmehro iſt in denen zwey △ ECB, und ACI
erſtlich der ∠ b + g ⊓, dem ∠ d + g.
Und die zwo Seiten EC, CB ⊓, denen zwo Seiten AC, CI.
(dann AE und CH, wie vorgemeldet, □ ſeynd)
Dahero wird der △ ECB ⊓ ſeyn, dem △ ACI d. 4. 1.
Unterdeſſen iſt das □ KLCE doppelt deß △ ECB. d. 41. 1.
Und auch das □ BHIC iſt doppelt deß △ ACI. d. d. ſelbe.



Folget, daß auch das ▭ KLCE ſeye ⊓ dem □ BHIC. d. 6. ax.

Ferner, weilen der ∠ c ⊓ iſt, dem ∠ a. d. 29. def. 1.
ſetze zu dieſen beyderſeits hinzu den gemeinen ∠ f.

So wird auch der ∠ c ⊹ f ⊓ ſeyn dem ∠ a ⊹ f.

Nun betrachte die zwey △ FAC, und BAD, allwo
die Seiten FA ⊓ iſt, der Seiten AB; und AC ⊓ der AD. d. 29. def. 1.
und, wie ſchon bewieſen, der ∠ c ⊹ f ⊓ iſt, dem ∠ a ⊹ f.

Darumb iſt der △ FAC ⊓ dem △ BAD. d. 4. 1.

Unterdeſſen iſt das ▭ LKDA doppelt deß △ BAD, d. 41. 1.
und das □ ABGF doppelt deß △ FAC, d. d. ſelbe.

Folget, daß auch das ▭ LKDA ⊓ ſeye, dem □ ABGF. d. 6. ax.

Weilen aber beyde ▭ LKDA, ⊹ KLCE das □ AE machen.

So ſchlieſſet man, daß alſo das □ AE ⊓ ſeye beyden □ CH, und
AG, ſammentlich.

Welches zu beweiſen ware.

Anmerckung.

Hierauß iſt leichtlich abzunehmen, daß in denen △, das □, ſo auff einer Seiten, welche einen ſpitzigen ∠ unterſpannet, gemacht wird, ⌝ ſeye, als beyde □ ſammentlich, ſo auff denen übrigen zwo Seiten, welche den ſpitzigen ∠ beſchlieſſen, gemacht werden.

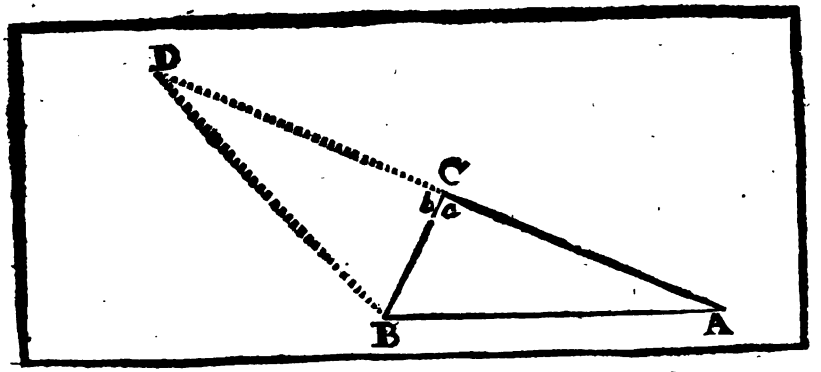
In denen ſtumpffwinckichten △ aber, iſt das □, ſo auff der Seiten, welche den ſtumpffen ∠ unterſpannet, gemacht iſt, allzeit ⌜, als beyde □ ſammentlich, ſo auff denen zwo Seiten, welche den ſtumpffen ∠ beſchlieſſen, gemacht ſeyn.

Die Urſach iſt augenſcheinlich, dann wann man den ſtumpffen ∠ ſolcher Geſtalten zuſammen ziehet, biß er endlich ⌐ wird, einem Rechten ∠; die zwey Seiten aber allweil in einerley Länge verbleiben, alsdann die Seiten, welche den ſtumpffen ∠ unterſpannet, kleiner werden wird.

Entgegen, wann man den ſpitzigen ∠ ſo lang von einander ziehet, biß er letzlich einem Rechten ∠ ⌐ werde, die übrige zwo Seiten aber, welche den ſpitzigen ∠ beſchlieſſen, allzeit in einerley Länge verbleiben, ſo wird die Seiten, welche den ſpitzigen ∠ unterſpannet, gröſſer werden.

In der vorhergehenden iſt unterdeſſen bewieſen worden, daß das □, ſo auff der Seiten gemacht iſt, welche den rechten ∠ unterſpannet, ⌐ ſeye, denen zwey □ ſammentlich, ſo auff denen übrigen Seiten gemacht ſeynd.

So folget ja klar, daß das □, ſo auff der Seiten gemacht iſt, welche den ſtumpffen ∠ unterſpannet, ⌜, und hinwiederumb das □, ſo gemacht iſt auff der Seiten, welche den ſpitzigen ∠ unterſpannet, ⌝ ſeye, als die zwey □ ſammentlich auff denen übrigen zwo Seiten, ſo gedachte ∠ beſchlieſſen.



Die XLVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann das Quadrat auff einer Seiten (als wie AB) in einem Triangel (ACB) gleich iſt, denen andern zweyen Quadraten ſammentlich, welche auff denen andern zwo Seiten (AC, BC) beſchrieben worden: ſo wird der Winckel (a), welcher von ſothanen andern zwo Seiten beſchloſſen iſt, ein rechter Winckel ſeyn.

Zubereitung.

Auff CB erhöhe auß dem Punct C die ⊥ CD. 8. 11. 1.
Mache CD ⊓, der Seiten AC; und ziehe DB zuſammen.

Beweiß.

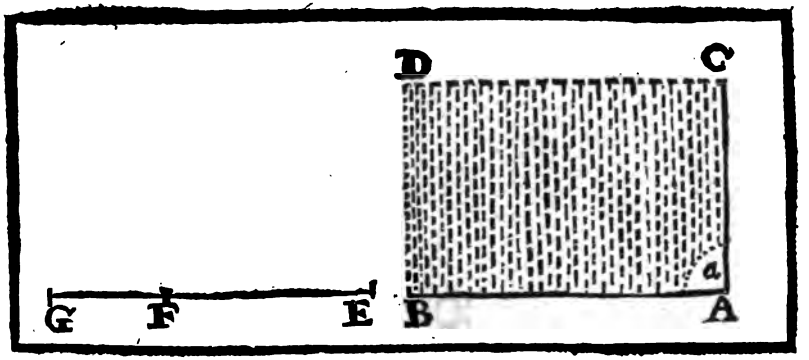
Der ∠ b in dem △ BCD iſt ein Rechter ∠, d. 6. Zuh.
Darumb wird das □ auff DB ⊓ ſeyn, denen zwey □ auff BC, CD. d. 47. 1.
Die Linie CD iſt unterdeſſen ⊓ gemacht worden, der Linie CA. d. d. Zuh.
Folget, daß auch das □ auff DB ⊓ ſeye, denen zwey □ auff BC, CA.
Denen □ auff BC, und CA aber iſt ⊓ gegeben, das □ auff BA. d. d. Vor.
Dahero wird das □ auff BD ⊓ ſeyn, dem □ auff BA.
Und folgends durch die vierdte Anmerkung der 46. Vorg. dieſes Buchs wird die Linie BA ⊓ ſeyn, der Linie BD, v. ſ. f.
Dahero wegen der drey gleichen Seiten wird der △ ABC ⊓ ſeyn, dem △ BCD. d. 8. 1.
Und weilen der ∠ b ein Rechter ∠ iſt, ſo d. d. Zuh.
Folget letzlich, daß auch der ∠ a ein Rechter ∠ ſeyn müſſe.
Welches zu beweiſen ware.

Das

Anderte Buch

Deß Teutſch-redenden

Euclides.



Wort-Erklärungen.

I.

Ein Recht-wincklichtes Parallelogram iſt, welches von zwey geraden Linien (AB, AC) beſchloſſen wird, und einen rechten Winckel (a) hat.

Dieſes iſt alſo zu verſtehen, nemlich, daß ein Recht-wincklichtes Parallelogram nur zwey gewiſſe Linien (deren eine die Baſis, die andere aber die Höhe genant wird) einen Raum darmit einzuſchlieſſen, nöthig habe: dann wann einer ſich ihme im Sinn einbildet, daß die Höhe AC der Länge AB nach, als zeit I biß an das Ende B fortgeſchoben werde, ſo ſolte zweiffelsohne ein ſolcher Fortſchub den Raum CABD hinterlaſſen, an welchen die zwey Seiten CD und BD gleich und Parallel ſeyn werden, denen zwo überſtehenden Seiten AB und AC. Und dahero die Figur CABD ein Parallelogram durch die 35. def. deß I. Buchs, und zwar wegen der I ein Rechtwincklichtes ſeyn werde. Deswegen man ſchlieſſet, daß zu Erkennung des Begriffs, oder Raums eines Rechtwincklichten Parallelograms bloſſe zwey Seiten, welche den Rechten Winckel begreiffen, nöthig ſeyn.

Anmerckung.

I.

Ein Rechtwincklichtes Parallelogram, welches auch eine Winckelrechte Figur genannt iſt, wird in dieſem Buch ſo wol für ein Quadrat, als für ein gewöhnliches Parallelogram, welches bloß die überſtehende Seiten einander ⊓, ═, und einen rechten Winckel hat, genommen.

II.

Ein Winckel-Rechtes Parallelogram, von zwey gleichen Seiten, wird in dieſem Buch mit dem Zeichen ▭, und ein Winckelrechtes Parallelogram von vier gleichen Seiten, das iſt, ein Quadrat, mit dem Zeichen □ angedeutet.

III.

III.

An ſtatt daß man ſonſten ein ▭ oder □ mit vier Buchſtaben beſchreibet, als wie hier das ▭ ABCD, ſo pflegt man Kürtze halber, daſſelbe nur mit drey Buchſtaben zu bezeichnen, von welchen der mittlere den Rechten Winckel, und die andere zwey, die zwey Seiten andeuten, gleich wie in dem ▭ CAB ſeynd die zwo Seiten CA, AB, mit welchen der Rechte ∠ a beſchloſſen iſt. Doch werden die gemachte ▭ bloß nur mit zwey Buchſtaben, welche längſt dem Diameter gegen einander über ſtehen, beſchreiben, alſo an ſtatt ABDC, oder CAB ſchreibet man allein AD, oder BC.

IV.

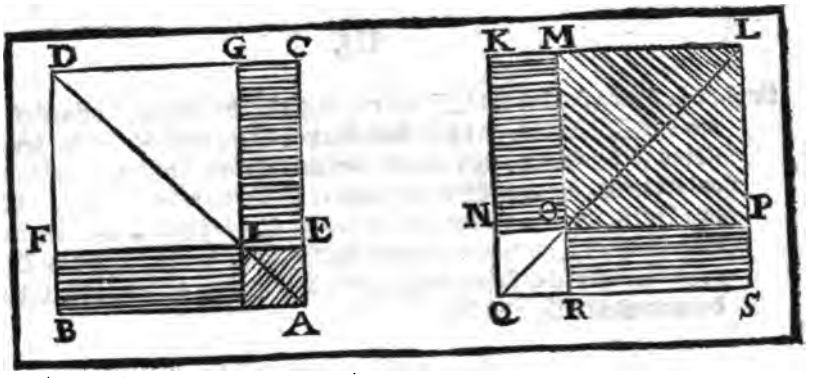
Man pfleget auch ſchlecht hinauß eine gerade Linie zu ziehen, gleich wie GE, und ſolche an einem gewiſſen Punct, als wie in F, durchzuſchneiden, welches hernachmahlen ein Recht-wincklichtes Parallelogram bedeutet, welches von denen zwey Seiten GF, FE (ſo umb den rechten Winckel F ſtehen) beſchloſſen iſt, und alſo geſchrieben wird, das ▭ EFG, oder GFE.

V.

Wann die Baſis eines ▭, oder □ durch die Höhe; oder entgegen, die Höhe durch die Baſis vermehret wird, ſo überkommt man in Zahlen den Inhalt deß ▭, oder □. Geſetzt das ▭ AD habe die Höhe AC von 6, und die Baſis AB von 12. Klafftern. Wann nun 6 durch 12, oder 12 durch 6 vermehret wird, ſo komen im Product 72 Klafftern, (welche aber Quadrat-Klafftern ſeynd, deren ein jedes in der Länge und Breite juſt ein Klaffter hat) für den Inhalt deß ▭ AD herauß.

Herentgegen, wann man den Inhalt eines ▭ oder □ durch die Anzahl der Höhe zertheilet, ſo kriegt man im Quotient die Anzahl der Länge der Baſis; oder wann man den Inhalt durch die Anzahl der Länge der Baſis zertheilet, ſo hat man im Quotient die Anzahl der Länge der Höhe.

Zu einem Exempel zertheile 72 mit der Höhe 6; ſo haſt im Quotient 12 für die Länge der Baſis; zertheileſt aber 72 mit der Baſis 12, ſo kommet ein Quotient herauß 6. für die Länge der Höhe.



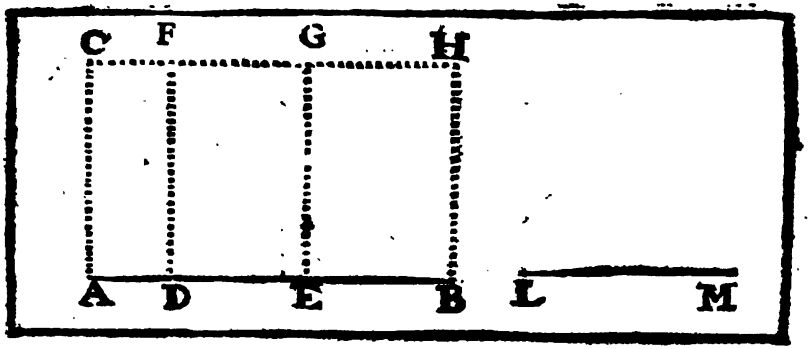
II.

In einem jeden Parallelogram werden die zwey Außfüllungen, oder Complementen, sambt einem auß denen zwey übrigen Quadraten, durch welche der Diameter gehet, der Winckelhacken, oder in Griechischer Sprach, Gnomon geheissen.

Auff zweyerley Art mag dieser Winckelhacken gemacht werden. Dann erstlich kan man zu denen zwey Außfüllungen das grössere Quadrat, hernach auch das kleinere Quadrat darzu nehmen.

In dem Parallelogram AD seynd zu dem Winckelhacken BIC (dann man solchen bloß mit drey Buchstaben anzudeuten pfleget) die zwey Außfüllungen BI, und IC, und das kleinere □ ID genommen worden.

Zu dem Winckelhacken KOS aber in dem Parallelogram QL, seynd die zwo Außfüllungen KO, OS, und das grössere □ OL gebraucht worden.



Die I. Vorgab. Betrachtung.

Wenn zwo gerade Linien (AB, LM) ſeynd, und man eine darvon (als wie AB) in unterſchiedene Theile, gleiche oder ungleiche (nemlich allhier in die ungleiche AD, DE, EB) zertheilet: ſo wird das Parallelogram (AH), welches von denen zwey geraden Linien (AB, LM) beſchloſſen worden iſt, gleich ſeyn, allen denen Parallelogramen ſammentlich (nemlich AF, DG, EH), ſo von der unzertheilten Linie (LM), und einem jedwedern Theil der zertheilten Linie (AB) gemacht worden iſt.

Das iſt, das ▭ AH iſt □, denen ▭ AF, + DG + EH.

Zubereitung.

Auß beyden Enden der Linie AB erhöhe die ⊥ AC, und BH, welche gleich lang ſeyen, der gegebenen LM. — d. 11. 1.

Ziehe die zween Puncten CH mit einer geraden Linie zuſammen, ſo entſtehet daraus das ▭ AH, deſſen eine Seiten AB zertheilt, die andere aber AC (ſo □ iſt der LM) unzertheilt iſt. — d. 1. def. 2.

Unterdeſſen ziehe aus denen Puncten D, E die Linien DF, EG ═, der Seiten AC, oder BH biß in die Seiten CH. — d. 31. 1.

So kommen die drey ▭ AF, DG, EH hierauß, welche zu einer Seiten die Linie AC, (oder die gleiche LM), zu der andern aber die gegebene Theile AD, DE, und EB haben. — d. 1. def. 2. und 33. 1.

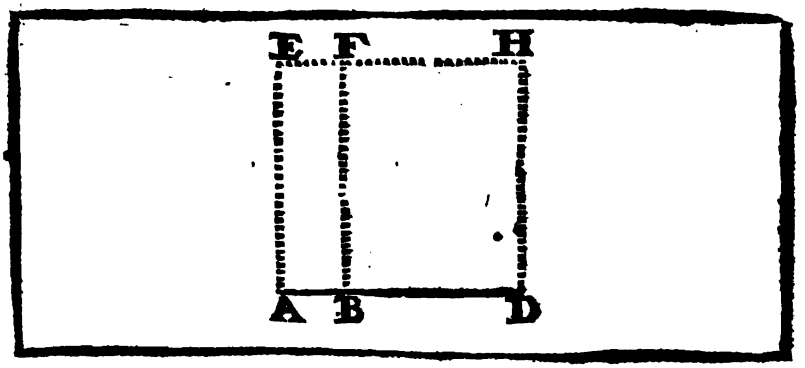
Beweiß.

Erſtlich iſt aus der Zubereitung klar, daß die ▭ AF, DG, EH Eine Seiten □, der gegebenen unzertheilten Linie LM, zu der andern aber die Theile AD, DE, EB der zertheilten Linie AB haben. — d. d. Zub.

Anderten iſt augenſcheinlich, daß das ▭ AH, welches zu einer Seiten AC (oder die gleiche LM), zu der andern aber die zertheilte AB hat, □ ſeye, denen ▭ AF + DG + EH. — d. 14. ax. 1.

(Dann das gantze iſt □, allen ſeinen Theilen ſammentlich).

Welches zu beweiſen ware.



Die II. Vorgab.

Betrachtung.

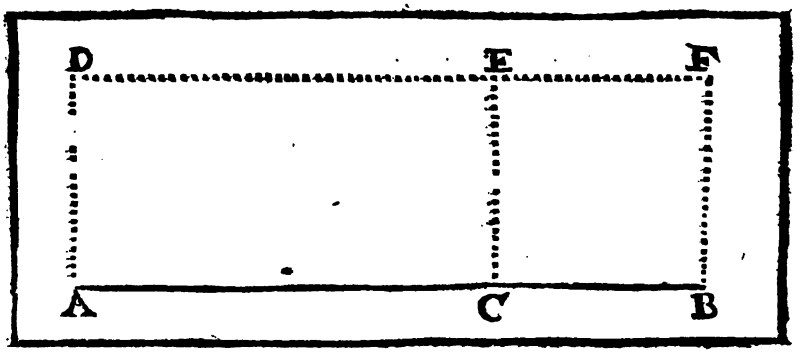
Wenn man eine gerade Linie (AD) nach Gefallen zertheilet (als wie in B), ſo werden die Parallelogrammen (AF, BH) welche von der gantzen Linie, und denen Theilen begriffen werden, gleich ſeyn, dem Quadrat (AH) welches auf der gantzen Linie (AD) iſt beſchrieben worden.
Das iſt, die ▭ AF + BH ſeynd ⌐ dem □ AH.

Zubereitung.

Auf AD mache das □ AH. — 46. 1.
Auß dem Punct B ziehe die Linie BF ═, der Seiten AE oder DH. — 31. 1.
Davauß entſtehen nun die zwey ▭ AF, und BH, welche zu einer Seiten die Linie AD, zu der andern aber die Abſchnitte AB, BD haben. — 33. 1. u. 1. def. 2.

Beweiß.

Weilen AH ein □ iſt, ſo werden die vier Seiten einander ⌐ ſeyn. — 6. d. Zuß.
Dahero iſt klar, daß die zwey ▭ AF, und BH zu einer Seite die gantze Linien AD (dann AE, und DH, oder BF derſelben AD ⌐ ſeynd) zu der andern Seite aber, die Abſchnitte, oder Theile AB, BD haben.
Unterdeſſen iſt augenſcheinlich zu ſehen, daß gedachte zwey ▭ AF, BH eben den Raum, welchen das Quadrat AH hat, einnehmen.
Dahero werden die zwey ▭ AF + BH ⌐ ſeyn, dem □ auf AD (nemlich die Theile ſammentlich ſeynd ⌐, ihrem Gantzen:)
Welches zu beweiſen ware.



Die III. Vorgab.

Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) nach Gefallen (als wie in C) zertheilet: ſo wird das Parallelogram (AF), welches von einem Theil (AC), und der gantzen Linie (AB) iſt gemacht worden, gleich ſeyn, dem Quadrat (CF), ſo gemacht iſt auff einem Theil (CB), und dem Parallelogram (AE), welches von einem (CB), und dem andern Theil (AC) iſt beſchloſſen worden.

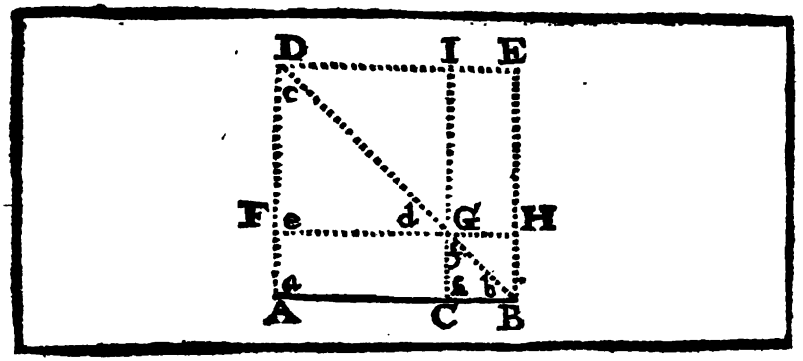
Das iſt, das ▭ AF iſt ⊓, dem ▭ AE + □ CF.

Zubereitung.

Mache auff dem Theil AC das ▭ AE. d. 46. I.
Auß dem Ende B erhöhe die ⊥ BF. d. 11. I.
Verlängere DE, biß ſie BF in F berühre, d. 33. I.
So erwachſen hierauß, das ▭ AE, und das □ CE. u. 1. def. 2.

Beweiß.

Es iſt klar, daß das □ CF ihre Seiten ⊓ hat, dem einen Theil CB, d. d. Zuß.
So hat auch das ▭ CB wegen deß □ AC die eine Seiten CE ⊓, dem einen Theil CB, und zu der andern Seite, den andern Theil AC.
Dieſes □ CF ſambt dem ▭ AE nehmen unterdeſſen denſelben Raum ein, welchen das ▭ AF beſchlieſſet, ſo zu einer Seiten die gantze AB, und zu der andern den Theil CB, oder AD hat.
Dahero iſt das ▭ AF ⊓, dem □ CF + ▭ AE. d. 14 ax. 2.
(das gantze ſeinen Theilen ſammentlich.)
Welches zu beweiſen ware.



Die IV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) nach Gefallen zertheilet (als wie in C), so wird das Quadrat (AE), welches auff der gantzen Linie (AB) ist beschrieben worden, gleich seyn, denen zwey Quadraten (BG, und GD), so auff beyden Theilen (AC, BC) gemacht, und denen zwo Winckelrechten Figuren (AG, GE), welche von denen beyden Theilen (AC, CB) seynd beschlossen worden.

Das ist, das □ AE ist ⊓ denen zweyen □ DG + GB + zweyen ▭ AG + GE.

Zubereitung.

Mache auff AB, das □ AE. d. 46. 1.
Ziehe den Diameter BD.
Auß C ziehe die Linie CI ═, der Seiten BE, oder AD. ∪ d. 31. 1.
allwo sie der Diameter durchschneidet, nemlich in Punct G.
Durch diesen Punct ziehe die Linie FH ═, der Seiten AB, oder DE.
Nunmehro stehet zu beweisen, daß die ▭ DG, und GB zwey □ seynd, und zu ihren Seiten die Theile AC, CB haben.
Hernach, daß die ▭ AG, und GE auch von denen zwey Seiten AC, CB beschlossen seynd.

Beweiß.

Weilen AE ein □ ist, d. d. Zub.
so werden die vier Seiten einander ⊓ seyn.
Dahero in dem △ DAB, wegen der gleichen Seiten AD, AB seynd die zwey ∠ c und b einander ⊓. d. 5. 1.
Unterdessen ist der ∠ a ein Rechter ∠ d. 29. def. 1.
Folget, daß also die ∠ c und b zwey halbrechte seynd. d. Cor. 2. 32.

Ferner iſt in dem △ DFG der ∠ e ein Rechter ∠ — d. 29. def. I.
und der ∠ c ein halb Rechter. — d. d. Vor.
Dahero wird auch der dritte ∠ d ein halb Rechter ſeyn. — d. Cor. 1. 32. I.
und folgends der ∠ d ⌐ ſeyn, dem ∠ c.
Deßwegen iſt auch die Seiten FD ⌐, der Seiten FG. — d. 6. I.
Auff ſolche Art wird bewieſen, daß auch DI ⌐ ſeye, der IG.
Unterdeſſen iſt DF ═, der GI: und FG ═, DI. — d. d. Zuß.
darumb iſt GD ein ▭. — d. 35. def. I.
Und zwar wegen dergleichen Seiten FD, FG, und — {d. 34. I. u. 29. def. I.
denen vier Rechten ∠, ein □.
Eben auff dieſe Weiſe wird BG ein □ ſeyn.
Weilen nun das □ BG auff dem Theil CB ſtehet, und das
□ GD die Seite GF ⌐ hat, der Linie AC. — d. 34. I.
So folget letzlich, daß dieſe zwey □ BG, und GD zu ihren Seiten
Die Theile AC, CB haben, welches das erſte zu beweiſen ware.
Nunmehro, indeme BG ein □ iſt, ſo wird CG ⌐ ſeyn, der GH.
das iſt, beyde Seiten CG, und GH ſeynd ⌐, dem Theil CB. — d. 34. I.
Auch weilen GD ein □ iſt, ſo wird FG ⌐ ſeyn, der GI.
das iſt, beyde Seiten FG und GI ſeynd ⌐, dem Theil AC. — d. 34. I.
Dahero ſeynd beyde ▭ AG, GE von gleichen Seiten FG, GC,
und IG, GH (welche ⌐ ſeynd, denen Theilen AC, CB) beſchloſſen.
Letzlich iſt augenſcheinlich, daß dieſe zwey □, ſambt denen
zwey ▭, das □ AE außfüllen.
Dahero iſt das □ AE ⌐, denen zwey □ DG, GB ⇀ zwey ▭
AG ⇀ GE.
Welches zu beweiſen ware.

Folge. I.

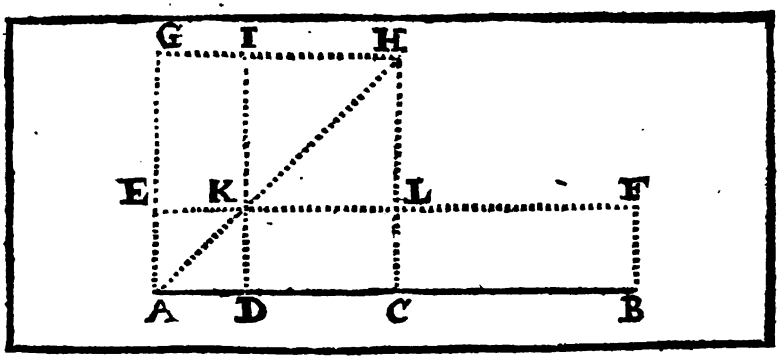
Die Parallelogramen umb den Diameter eines Quadrats ſeynd □.

II.

Der Diameter ſchneidet die ∠ in denen □ gleich entzwey, gleich wie es von denen ▭ in der 34. Vorg. deß I. Buchs iſt bewieſen worden.

III.

Wann eine gerade Linie juſt entzwey getheilet wird, ſo iſt das beſchriebene □ auff derſelben Linie ⌐, 4 □, welche ihre Seiten ⌐ haben der Helffte derſelben Linie: dann alle dieſe vier □ können umb den Diameter geſetzt werden; ſo folget auß dieſen, daß ein □ auff der Helffte derſelben Linie $\frac{1}{4}$ von dem □ auff der gantzen Linie ſeye.



Die V. Vorgab. Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) in zwey gleiche Theile (in C), und in zwey ungleiche (als wie in D) zertheilt: ſo wird das Quadrat (AH) auff der halben Linie (AC) gleich ſeyn, der winckelrechten Figur (DF), welche von denen zwey ungleichen Theilen (AD, DB) iſt beſchrieben worden, ſambt dem Quadrat (KH), welches auff dem mitlern Theil (CD) iſt gemacht worden.

Das iſt, das □ AH iſt ⊓, dem ▭ DF + □ KH.

Zubereitung.

Mache auff der halben AC das □ AH, und ziehe den Diameter AH.

Auß D ziehe die Linie DI ═, der AG, oder CH, welche den gezogenen Diameter AH in Punct K durchſchneidet. — d. 31. 1.

Durch K ziehe die Linie EF ═, und ⊓ lang, der Linie AB.

Hange letzlich B, F zuſammen.

Beweiß.

Es iſt klar, das AK, KH □ ſeynd, und zu dero Seite die ungleiche Theile AD, DC haben; daß auch DF ein ▭ von denen Theilen AD, DB ſeye. — ſd. 1. Cor. 4. 2. und 34. 1.

Nunmehro, weilen das ▭ CK ⊓ iſt, dem ▭ KG. — d. 43. 1.

ſetze beyderſeits hinzu das gemeine □ AK.

So wird das ▭ CE ⊓ ſeyn, dem ▭ GD. — d. 2. ax. 1.

Das ▭ CE aber iſt ⊓, dem ▭ CF. — d. 36. 1.

Darumb wird auch das ▭ GD ⊓ ſeyn, dem ▭ CF.

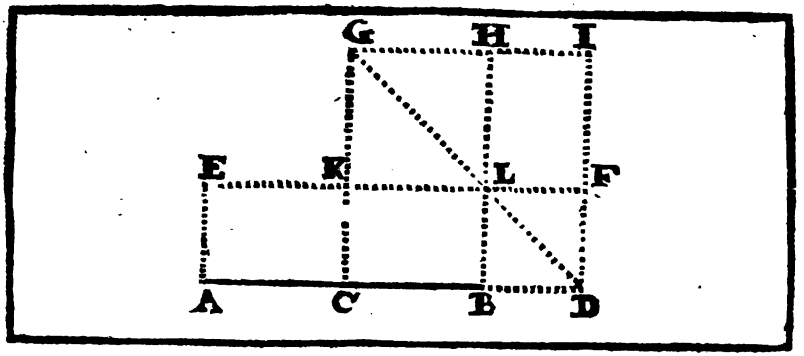
Setze nun hinzu beyderſeits das gemeine ▭ CK.

So wird der Winckelhacken GKC ⊓ ſeyn, dem ▭ DF.

Setze letzlich beyderſeits hinzu das gemeine □ KH.

So wird das □ AH ⊓ ſeyn, dem ▭ DF + □ KH.

Welches zu beweiſen ware.



Die VI. Vorgab. Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) in zwey gleiche Theile (als wie in C) theilet, und eine andere gerade Linie (BD) daran ſtoſſet: ſo wird die winckelrechte Figur (AF), welche von der gantzen Linie (AB), und dem Zuſatz (BD) als einer einigen geraden Linie, und von dem Zuſatz (BD), als der andern Linie iſt gemacht worden, ſambt dem Quadrat (KH) der halben Linie (CB) gleich ſeyn, dem Quadrat (CI), welches auff der halben Linie (CB), und dem Zuſatz (BD), als einer einigen Linie, iſt beſchrieben worden.

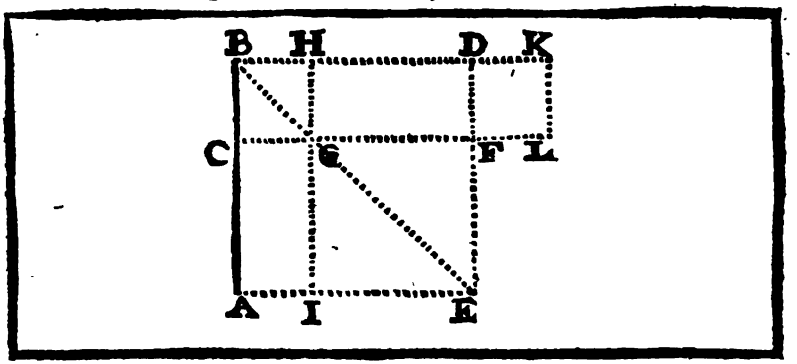
Das iſt, das ▭ AF + □ KH iſt ⌐ dem □ CI.

Zubereitung.

Auff der Linie CD mache das □ CI, und ziehe den Diameter DG. — d. 46. 1.
Auß B ziehe die Linie BH ═, der Seiten DI, oder CG; alwo ſie den Diameter, nemlich in dem Punct L, durchſchneidet, — d. 31. 1.
Durch dieſen ziehe die Linie FE ═, und ⌐ lang, der AD. — d. 31. 1.
Hange letzlich A, E zuſammen.

Beweiß.

Erſtlich ſeynd DL, LG □, welche zu dero Seiten die Theile BD, und CB haben. — d. 1. Cor. 4. 2.
Hernach iſt klar, daß AF ein ▭ von denen Seiten AD, DF ſeye.
Alsdann, weilen das ▭ FC ⌐ iſt, dem ▭ CL. — d. 36. 1.
das ▭ CL aber ⌐ iſt, dem ▭ LI. — d. 43. 1.
So wird auch das ▭ EC ⌐ ſeyn, dem ▭ LI. — d. 1, ax. 1.
Setze unterdeſſen beyderſeits hinzu das gemeine ▭ CF.
Folget, daß auch das ▭ AF ⌐ ſeye, dem Winckelhacken ILG.
Letzlich ſetze beyderſeits hinzu das gemeine □ KH.
So wird das ▭ AF + □ KH ⌐ ſeyn, dem □ CI.
Welches zu beweiſen ware.



Die VII. Vorgab. Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) nach Gefallen, (als wie in dem Punct C) zertheilet: ſo wird das Quadrat (AD) der gantzen Linie, ſambt dem Quadrat (FK) deß einen Stücks (CB), gleich ſeyn, zweymahln der Winckelrechten Figur (AH, oder HL), welche von der gantzen Linie (AB), und dem einen Stück (CB) beſchloſſen iſt, ſambt dem Quadrat (EG) deß andern Stücks (AC).

Das iſt, das □ AD + □ BG iſt ⌐, 2. ▭ AH + □ GE.

Zubereitung.

Schreibe auff der Linie AB das □ AD. d. 46. 1.

Ziehe den Diameter BE.

Hernach ziehe auß C die Linie CF ═, der Linie BD, oder AE. d. 31. 1.
allwo nun CF den Diameter durchſchneidet, nemlich in G,

Ziehe durch ſolchen Punct G die Linie HI ═, der Seiten AB, oder ED. d. 31. 1.

Letzlich auff DF (welche ⌐ iſt, der CB) mache das □ FK. d. 34. 1. und 46. 1.

Beweiß

Nach der erſten Folge der vierdten Vorgab dieſes Buchs ſeynd BG, und EG □, welche zu dero Seite die ungleichen Theile CB, und AC haben. d. 34. 1.

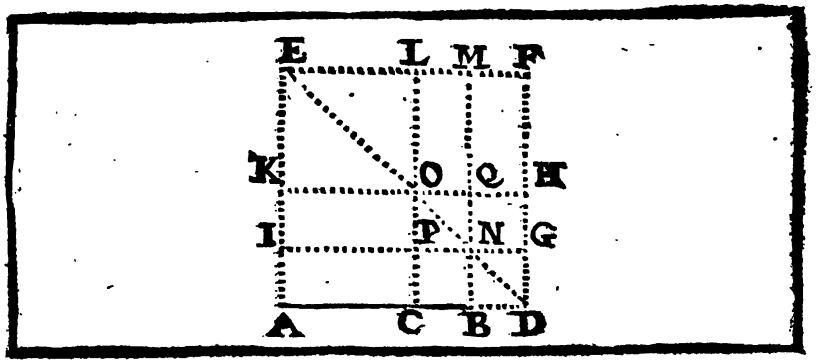
Alsdann, indeme CB, und FD einander ⌐ ſeynd, d. 31. 1.
ſo wird das □ BG ⌐ ſeyn, dem □ FK. d. 3. Cor. 46. 1.

Und folgends die übrige drey Seiten deß einen □ ⌐ ſeyn, denen übrigen drey Seiten deß andern □, das iſt, eine jede Seiten darvon, wird ſonderlich ⌐ ſeyn, dem Stück, oder Theil CB.

Hernach, weilen das ▭ AG ⌐ iſt, dem ▭ GD. d. 43. 1.
und wan man entzwiſchen beyderſeits die gleichen □ BG und FK hinzu ſetzet,
So wird auch das ▭ AH, welches von der gantzen Linie AB, und dem Stück CB (oder von der gleichen BH beſchloſſen iſt) ⌐ ſeyn, dem ▭ GK.

Unterdeſſen nehmen die zwey gleiche ▭ AH + GK, (oder mit einem Wort, das ▭ AH zweymahlen,) ſambt dem □ GE eben den Raum ein, welchen das □ AD ſambt dem □ FK (oder das gleiche □ BG begreiffet.

Dahero ſchlieſſet man, daß das □ AD + □ BG ⌐ ſeye, denen d. 14. ax. 1.
2 ▭ AH + □ GE. Welches zu beweiſen ware.



Die VIII. Vorgab. Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) nach Gefallen in zwey Theile (als wie in C) zertheilet: ſo werden die vier winckel-rechte Figuren ſammentlich, welche von der gantzen Linie (AB), und dem einen Theil (CB) ſeynd beſchloſſen worden, und mit dem Quadrat (EO) von dem andern Theil (AC), gleich ſeyn dem Quadrat (AF), welches auff der gantzen Linie (AB), und dem einen Theil (BD, welcher gleich iſt der CB), als einer einigen geraden Linie (AD) iſt beſchrieben worden.

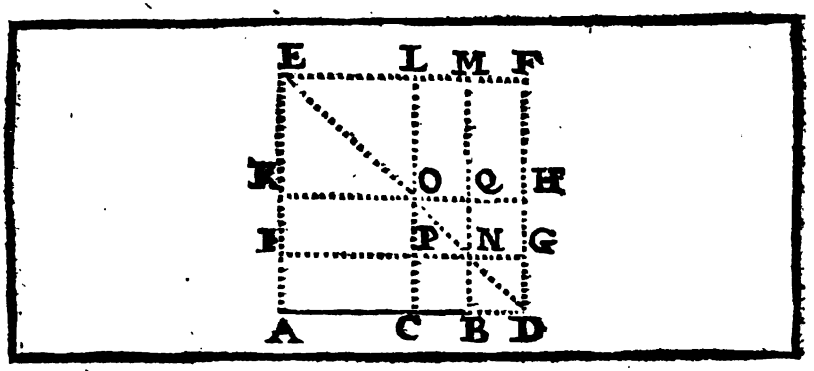
Das iſt, 4 ▭ AN + □ EO ſeynd ⊓, dem □ AF.

Zubereitung.

Verlängere AB, und mache BD ⊓, CB.
Schreibe auff der gantzen AD, das □ AF. D. 46. I.
Auß C, und B ziehe die Linien CL, BM ═, der DF, oder AE, D. 31. I.
Ziehe den Diameter ED, welcher CL in O, und BM in N durchſchneidet.
Durch O, und N ziehe die Linien HK, GI ═, der AD, oder EF.

Beweiß.

Indeme DN, NO, OE, auch NE umb den Diameter ED ſtehen, ſo ſeynd ſie ▭. D. 1. Cor. 42.
Und zwar OE wird das □ deß andern Theils AC ſeyn. (dann die Linie KO ⊓ iſt, der AC.) D. 34. I.
Ferner, weilen die Linie PN ⊓ iſt, dem einen Theil CB, und CB ⊓ iſt, der Linie BD. D. 34. I. D. D. Zub. I.
So wird das □ PQ ⊓ ſeyn, dem □ BG, und deßwegen werden auch die Linien BN, NQ, und GN, PN, erſtlich unter ſich, alsdann auch ⊓ ſeyn, dem Theil CB. D. 3. Cor. 46. D. 1. ax. I.



Dahero seynd die zwey ▭ AN, IQ von dem einen Theil CB, und der gantzen AB beschlossen. (dann IN ⊓ ist, der AB) b. 34. 1.

Unterdessen wegen deß □ NE ist die Linie NM ⊓, der Linie IN, (oder dergleichen AB)

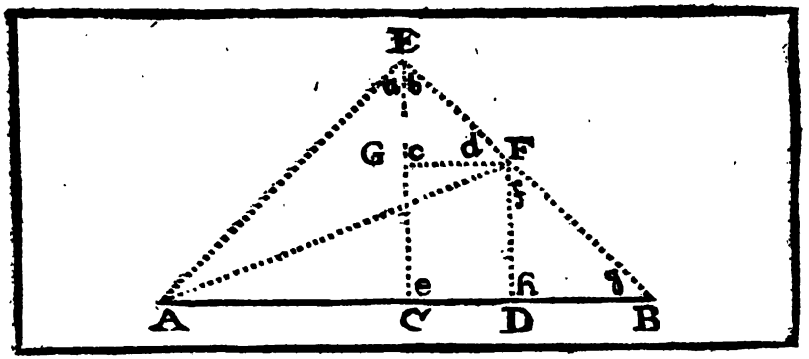
Darumb ist das dritte ▭ NF von der gantzen AB, und dem einen Theil CB (dann GN ⊓ ist, CB) beschlossen. b. d. Vor.

Letzlich, wann man an statt deß □ PQ das gleiche □ BG zu dem ▭ OM hinzu setzet, so hat man das vierdte ▭ PM, welches von der gantzen AB (dann PL ⊓ ist der NM), und dem einen Theil CB (so ⊓ ist, der PN) beschlossen worden ist. b. 34. 1.

Nunmehro begreiffen obgemeldte 4. ▭, welche von der gantzen AB, und dem einen Theil CB beschlossen seynd, sambt dem □ OE, deß andern Theils KO, eben den Raum, welchen das □ AF begreiffet, so auff der zusammen gesetzten AD von der gantzen Linie, und dem einen Theil ist gemacht worden.

Dahero ist das ▭ AN viermahlen genommen = □ EO ⊓, dem □ AF.

Welches zu beweisen ware.



Die IX. Vorgab. Betrachtung.

Wann man eine gerade Linie (AB) in zwey gleiche Theile (als wie in C) und noch dazu in zwey ungleiche Theile (als wie in dem Punct D) zertheilet: ſo werden die Quadraten, welche auff denen zweyen ungleichen Theilen (AD, DB) gemachet worden ſeynd, beyde zuſammen, zweymahlen ſo groß ſeyn, als die zwey Quadraten, welche auff der halben Linie (AC), und der mittlern (CD) ſeynd beſchrieben worden.

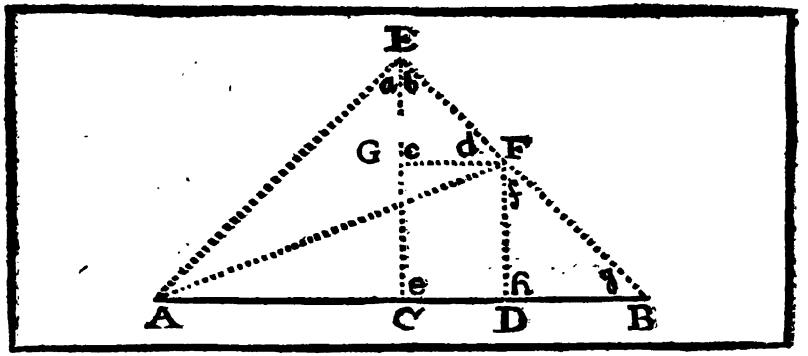
Das iſt, das □ AD + □ DB iſt ⊓, 2 □ AC + 2 □ CD.

Zubereitung.

Erhöhe auß C die ⊥ CE, ſo ⊓ iſt, der Helffte CB, oder AC. d. 11. 1.
Ziehe A, E und B, E zuſammen.
Auß D erhöhe die ⊥ DF, welche die EB im Punct F durchſchneidet, d. 12. 1.
Durch den Punct F ziehe GF ═, der AB. d. 31. 1.
Hange letzlich A, F zuſammen.

Beweiß.

In dem △ ECB iſt wegen deren gleichen Seiten EC, CB. d. d. Zuß.
der ∠ b ⊓, dem ∠ g. d. 5. 1.
Dahero, weilen der ∠ e ein rechter ∠ iſt gemacht worden,
wird ſo wohl der ∠ b, als der ∠ g ein halb rechter ∠ ſeyn. d. 2. Cor. 32.
Auff ſolche Weiſe wird auch der ∠ a in dem △ ECA ein halb
rechter ∠ ſeyn.
Und dahero der ∠ a + b ein gantz Rechter.
Unterdeſſen, weilen GF ═ gemacht iſt, der AB,
ſo wird der ∠ c auch ein rechter ∠ ſeyn.



Es iſt auch bewieſen worden, daß der ∠ b ein halb-rechter ſeye. Darumb wird auch der ∠ d ein halb-rechter ſeyn. d. 32. 1.

Und deßwegen die Seiten GE ▭ ſeyn, der Seiten GF. d. 6. 1.
(das iſt, dem Theil CD) d. 34. 1.

Auff dieſe Art, weilen in dem △ FDB der ∠ h auch ein Rechter ∠ iſt. d. d. Zuſ.

Und der ∠ g ein halb-rechter bewieſen worden iſt, ſo wird auch der dritte ∠ f ein halb-rechter ſeyn. d. 32. 1.

Dahero iſt die Seiten DF ▭, der Seiten DB. d. 6. 1.

Dieſem nach iſt das □ auff AE ▭, denen zwey □ auff AC, und GE, d. 47. 1.
oder (welches ein Ding iſt) das □ auff AE iſt ▭, 2 □ AC.
(dann AC ▭ iſt der CE.) d. d. Zuſ.

Auff ſolche Weiſe iſt auch das □ auff EF ▭, denen zwey □ auff EG, d. 47. 1.
und GF; oder (ſo eines iſt)

Das □ auff EF iſt ▭, 2 □ auff GF, (oder dergleichen, CD).

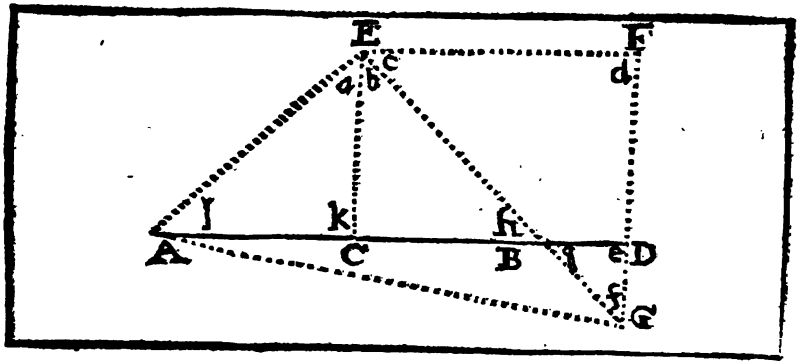
Denen beyden □ aber auff AE, und EF iſt ▭, das □ auff AF. d. 47. 1.

Dahero iſt das □ auff AF ▭, 2 □ AC, und 2 □ CD.

Unterdeſſen ſeynd wegen der ⊥ DF dem □ auff AF ▭, die zwey □ d. 47. 1.
auff AD, und DF, (oder dergleichen DB.)

Dahero ſchlieſſet man, daß die zwey □ auff AD und DB ▭ ſeynd, 2 □ AC + 2 □ CD, (oder, ſo eine Sach iſt), die zwey □ auff denen ungleichen Theilen AD, und DB zuſammen, ſeynd zweymahln gröſſer, als die zwey □ auff der halben Linie AC, und der mitlern Linie CD zuſammen.

Welches zu beweiſen ware.



Die X. Vorgab. Betrachtung.

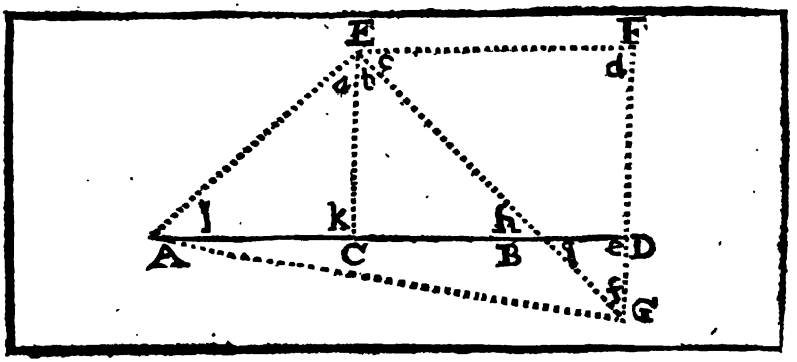
Wann ein gerade Linie (AB) in zwey gleiche Theile (als wie in C) zertheilet ist, und man derselben eine andere (BD) gerad nach der Länge daran setzet, so wird das Quadrat auff der gantzen Linie, sambt dem Zusatz, als einer einigen Linie (AD), sambt dem Quadrat deß Zusatz (BD) zweymahlin so groß seyn, als die andere zwey Quadraten von der halben Linie (AC), und dem Quadrat, welches auff der halben Linie, und dem Zusatz, als einer einigen Linie (CD) beschrieben wird.
Das ist, das □ AD + □ BD ist ⊓, 2 □ AC + 2 □ CD.

Zubereitung.

Auß C erhöhe die ⊥ CE, welche ⊓ seye, der Helffte AC, oder CB. 8. II. 1.
Hange A, E, und B, F zusammen.
Durch D ziehe GDF ═, der Linie CE. 8. 31. 1.
Abermahlen durch E ziehe EF ═, der CD, biß sie GDF durchschneide in dem Punct F.
Alsdann verlängere EB, biß sie GDF im Punct G durchschneide.
Hange letzlich G, A zusammen.

Beweiß.

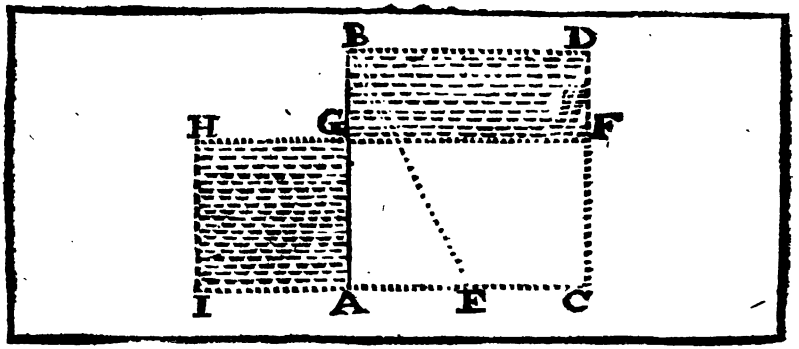
In dem △ ECA ist die Seiten EC ⊓, der Seiten AC. 8. 8. Zus.
Dahero wird auch der ∠ a ⊓ seyn, dem ∠ l. 8. 5. 1.
Und wegen des rechten ∠ k werden dann beyde ∠ a und l zweyen halb rechte ∠ seyn. 8. 2. Cor. 32. 1.
Auff solche Weise seynd in dem △ ECB die beyde ∠ b und h auch zwey halb rechte ∠.
Dahero ist auch der ∠ a + b ein gantz rechter ∠.



Ferner, indeme GF = ist, der CE,
so wird der ∠ f ⊓ seyn, dem ∠ b, das ist
der ∠ f wird auch ein halbrechter ∠ seyn.
So ist auch in dem △ BDG der ∠ g ein halbrechter ∠,
(dann der ∠ g ⊓ ist, dem halbrechten ∠ h)
Dahero muß der dritte ∠ e nothwendig ein rechter ∠ seyn.
und entzwischen wegen dergleichen ∠ ist GD ⊓, BD.
Nunmehro ist auch der ∠ d ein rechter Winckel.
(dann wegen dessen daß EF = ist CD, so ist der ∠ d ⊓, dem ∠ e).
Deßwegen in dem △ EFG, weilen der ∠ f ein halbrechter,
und der ∠ d ein rechter schon bewiesen worden ist.
Auch der dritte ∠ c ein halbrechter ∠ seyn werde.
und darumb ist GF ⊓, der EF,
welche auch ⊓ ist, der Linie CD.
Hernach, weilen das □ auff AE ⊓, 2 □ auff AC.
(dann AC ⊓ ist, CE und das □ AE beyden □ ⊓ ist)
Setze hinzu beyderseits das gemeine □ auff EG,
so wird das □ auff AE + □ auff EG ⊓ seyn, 2 □ auff AC
+ □ auff EG.
Unterdessen ist beyden □ auff AE + □ auff EG ⊓, das □ auff AG.
Und denen 2 □ auff AE + □ auff EG seynd ⊓, dieselbe
2 □ auff AC, und die zwey □ auff EF + FG (das ist)
2 □ auff CD (dann schon bewiesen worden ist, daß EF, und
GF ⊓ seynd, der Linie CD)
Dahero wird das □ auff AG ⊓ seyn, denen 2 □ auff AC +
2 □ auff CD.
Letztlich seynd dem □ auff AG ⊓, die zwey □ auff AD, und DG.
(oder auff der gleichen BD).
Darumb wird auch das □ AD + □ BD ⊓ seyn, 2 □ AC + 2 □ CD.

Ferner, indeme GF = ist, der CE, — d. d. Zuh.
so wird der ∠ f ⊓ seyn, dem ∠ b, das ist — d. 29. I.
der ∠ f wird auch ein halbrechter ∠ seyn.
So ist auch in dem △ BDG der ∠ g ein halbrechter ∠,
(dann der ∠ g ⊓ ist, dem halbrechten ∠ h) — d. 15. I.
Dahero muß der dritte ∠ e nothwendig ein rechter ∠ seyn. — d. 32. I.
und entzwischen wegen dergleichen ∠ ist GD ⊓, BD. — d. 6. I.
Nunmehro ist auch der ∠ d ein rechter Winckel.
(dann wegen dessen daß EF = ist CD, so ist der ∠ d ⊓, dem ∠ e). — d. 29. I.
Deßwegen in dem △ EFG, weilen der ∠ f ein halbrechter,
und der ∠ d ein rechter schon bewiesen worden ist.
Auch der dritte ∠ c ein halbrechter ∠ seyn werde. — d. 32. I.
und darumb ist GF ⊓, der EF, — d. 6. I.
welche auch ⊓ ist, der Linie CD. — d. 34. I.
Hernach, weilen das □ auff AE ⊓, 2 □ auff AC. — d. 47. I.
(dann AC ⊓ ist, CE und das □ AE beyden □ ⊓ ist) — d. d. Zuh.
Setze hinzu beyderseits das gemeine □ auff EG,
so wird das □ auff AE + □ auff EG ⊓ seyn, 2 □ auff AC
+ □ auff EG.
Unterdessen ist beyden □ auff AE + □ auff EG ⊓, das □ auff AG. — d. 47. I.
Und denen 2 □ auff AE + □ auff EG seynd ⊓, dieselbe
2 □ auff AC, und die zwey □ auff EF + FG (das ist) — d. 47. I.
2 □ auff CD (dann schon bewiesen worden ist, daß EF, und
GF ⊓ seynd, der Linie CD) — d. d. Vor.
Dahero wird das □ auff AG ⊓ seyn, denen 2 □ auff AC +
2 □ auff CD.
Letztlich seynd dem □ auff AG ⊓, die zwey □ auff AD, und DG. — d. 47. I.
(oder auff der gleichen BD).
Darumb wird auch das □ AD + □ BD ⊓ seyn, 2 □ AC + 2 □ CD.

Welches zu beweisen ware.



Die XI. Vorgab. Handgriff.

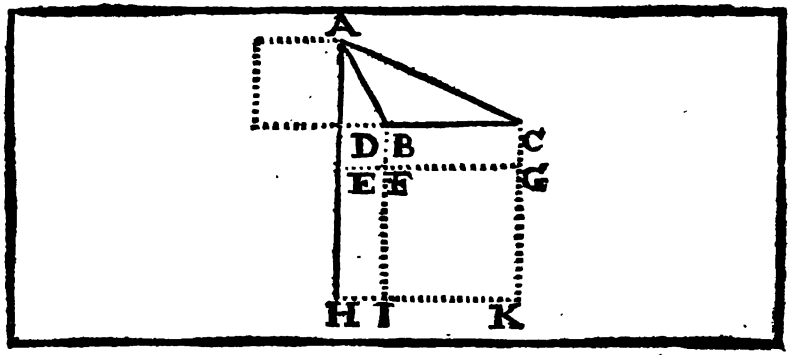
Eine vorgegebene gerade Linie (AB) ſolcher geſtalt entzwey zu theilen, (nemlich in G), daß die winckelrechte Figur (GD), welche von der gantzen Linie (AB), und dem andern Theil (GB) beſchloſſen wird, gleich ſeye, dem Quadrat (AH), welches auff dem einen Theil (AG) beſchrieben wird.

Handgriff.

Schreibe auff AB das □ AD — d. 46. I.
Zertheile eine Seiten, als wie AC in mitten in E. — d. 10. I.
Ziehe E, B zuſammen.
Verlängere unterdeſſen die Seiten AC alſo, biß daß
EI ⌐ ſeye der Linie EB.
Auff AI mache das AH.
Verlängere die Seiten HG, biß ſie die Seiten CD im Punct F berühre.
Nun ſaat man, daß das gemachte □ auff AG ⌐ ſeye, dem
▭ GD, welches von der gantzen AB, und dem andern Theil
GB iſt beſchloſſen worden.

Beweiß.

Dieweilen die Linie CA gerad̃t entzwey iſt zertheilet, — d. d. Hand.
und derſelben das Stück AI in der Länge nach darun geſetzet worden.
So wird das ▭ CH (welches von der zuſammengeſetzten CI
und dem Zuſatz AI, oder HI iſt beſchloſſen worden) ſambt
dem □ auff AE ⌐ ſeyn, dem □ auff EI (oder dergleichen BE). — d. 6. 2. und d. Hand.
Unterdeſſen iſt das □ auff EB ⌐, denen zwey □ auff AB, und auff AE. — d. 47. I.
Dahero folget, daß das ▭ CH + □ auff AF ⌐ ſeye, denen zwey □
auff AB, nnd AE.
Wann man nun beyderſeits das gemeine □ auff AE abziehet, ſo wird
das ▭ CH ⌐ ſeyn, dem □ auff AB.
(das iſt, dem □ AD).
Wann man abermahlen beyderſeits das gemeine ▭ CG darvon ziehet,
So wird dann letzlich überleiben das □ AH ⌐, dem ▭ GD.
Welches zu machen ware.



XII. Vorgab. Betrachtung.

In denen ſtumpffwincklichten Triangeln (ABC) iſt das Quadrat der einen Seiten (AC), ſo den ſtumpffen Winckel (B) unterſpannet, gröſſer, als die zwey Quadraten auff deren zwo Seiten (AB, BC), welche den ſtumpffen Winckel (B) begreiffen; um die Winckelrechte Figur, ſo zweymahlen gemacht wird, von dieſen beyden Seiten einer (als wie hier von (BC), und von dem Zuſatz (BD), in welchen die Bleyrechte (AD) aus dem Spitze (A) fället.

Das iſt, das □ auff AC iſt ⌐, als die □ auff AB, und BC umb das ▭ CBD zweymahlen genommen, (oder ſo ein Ding iſt)

Das □ auff AC iſt ⌐, denen □ auff AB + □ auff BC + 2 ▭ CBD.

Zubereitung.

Verlängere CB, und laſſe darauff aus dem Spitz A die ⊥ AD herunter fallen. d. 12. 1.

Alsdann zu leichterm Verſtand mache auff die Linie CD die Figur, welche in der 4. Vorgab dieſes Buchs iſt gemacht worden.

Letztlich auff DA beſchreibe ein □. d. 46. 1.

Beweiß.

Dieweilen die Linie CD zertheilet iſt in B.

So wird das □ auff DC ⌐ ſeyn denen zwey □ auff BC, und BD, und der winckelrechten Figur, welche mit BC, und BD beſchloſſen iſt, zweymahlen genommen. d. 4. 2.

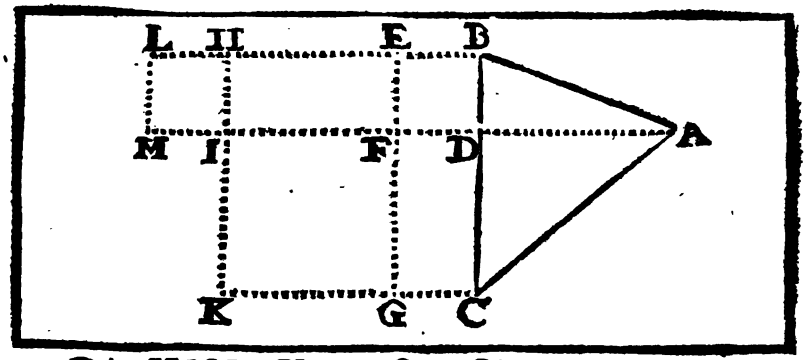
Das iſt, das □ auff CD iſt ⌐, denen 2 □ auff DB + 2 auff BC 2. ▭ CBD.

Setze nun beyderſeits hinzu das gemeine □ auff DA, ſo wird das □ auff CD + □ auff DA ⌐ ſeyn denen □ auff DB + □ auff BC + 2 ▭ CBD, + □ auff DA.

Weilen aber das □ auff AB ⌐ iſt, denen □ auff DB + □ auff DA, d. 47. 1. und denen zwey □ auff CD + □ auff DA ⌐ iſt, das □ auff AC. d. d. ſel.

So wird auch das □ auff AC ⌐ ſeyn, dem □ auff AB + □ auff BC + 2 ▭ CBD.

Welches zu beweiſen ware.



Die XIII. Vorgab. Betrachtung.

In denen ſcharffwincklichten Triangeln (ABC), iſt das Quadrat der Seiten (AC), welches den ſcharffen Winckel unterſpannet, kleiner, als die zwey Quadraten auff denen andern zwo Seiten (CB, BA), welche den ſcharffen Winckel (B) machen, zweymahln umb die winckelrechte Figur, ſo zu einer Seiten deß Triangels ſolche Seiten, in welche die auß dem Spitz (A) heruntergelaſſene Bleyrechte Linie (AD) fahlet, und zu der andern, das Stuck (DB), ſo zwiſchen der Bleyrechten Linie und dem ſcharffen Winckel lieget, hat.

Das iſt, das □ auff AC iſt ⌝, als die zwey □ auff AB, und BC umb das ▭ zwey mahlen, ſo von BC, und BD beſchloſſen iſt; oder

Das □ auff AC + 2 ▭ von BC, und BD iſt ⌐, denen zwey □ auff AB und BC.

Zubereitung.

Auß dem Spitz A laſſe auff BC herunter fallen die ⊥ AD. d. 12. 1.

Hernach (damit es klärer verſtanden werde) mache auff die Seiten BC eine dergleichen Figur, wie in der ſiebenden Vorgab dieſes Buchs iſt angewieſen worden.

Beweiß.

Die Linie BC iſt ungefähr im Punct D zertheilt worden.

Dahero iſt das □ auff BC ſambt dem □ auff BD ⌐, dem □ auff CD ſambt dem ▭ von CB, und DB zweymahln genommen. d. 7. 2.

Das iſt, das □ auff BC + □ auff BD iſt ⌐, dem □ auff DC + 2 ▭ von CB, und DB.

Wann man nun beyderſeits das gemeine □ auff DA hinzu ſetzet; ſo werden die drey □ auff BC + auff BD + auff DA ⌐ ſeyn, denen zwey □ auff DC + DA + 2 ▭ von CB, und DB.

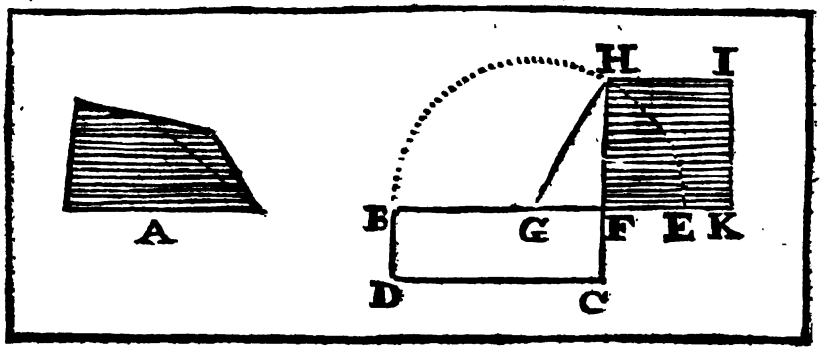
Unterdeſſen iſt denen zwey □ BD, und DA ⌐, das □ auff AB. d. 47. 1.

und denen zwey □ auff DC, und DA iſt ⌐, daß □ auff AC. d. 47. 1.

Folget dahero, daß auch die □ auff BC + AB ⌐ ſeyen, dem □ auff AC + 2 ▭ von BC, und BD. (oder ſo ein Ding)

Das □ auff der Seiten AC iſt ⌝, als die zwey □ auff AB und BC, umb das ▭ zweymahlen, ſo von BC, und BD beſchloſſen iſt.

Welches zu beweiſen ware.



Die XIV. Vorgab.

Handgriff.

Einer vorgegebenen geradtliniſchen Figur (A) ein gleich groſſes Quadrat (EI) zu machen.

Handgriff.

Mache das ▭ DF ⌐, der geradtliniſchen Figur A. 45. I.
Verlängere die Seiten BF, und mache FE ⌐, der Seiten FC.
Zertheile die Linie BE mitten im Punct G. 10. I.
Aus dem Punct G ſchreibe mit der Weite GB, oder GE einen halben Zirckel BHE.
Verlängere die Seiten CF biß an den Umbkreiß in H.
Auff FH mache das □ FI. 46. I.
Nun ſage ich, daß das □ FI ⌐ ſeye, dem ▭ DE, und folgends der Figur A.
Ziehe vorhero G, H zuſammen.

Beweiß.

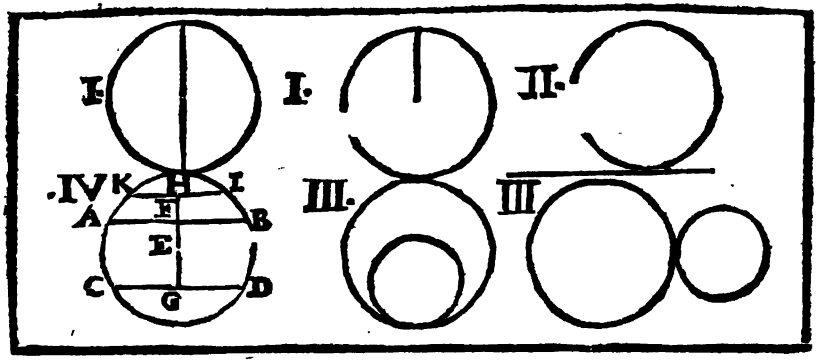
Die Linie BE iſt gleich in G, und ungleich in F zertheilet. 5. d. Hand.
Dahero iſt das ▭ DF + □ auff GF ⌐, dem □ auff GE, oder auff dergleichen GH. 5. 2. d. 15. def. 1.
Unterdeſſen iſt das □ auff GH ⌐ denen beyden □ auff FH + auff GF. 47. I.
Wann nun beyderſeits das gemeins □ auff GF darvon gezogen wird,
So iſt klar, daß das ▭ DE ⌐ verbleiben werde, dem □ auff FH.
Weilen aber das ▭ DF ⌐ iſt gemacht worden, der Figur A. 5. d. Hand.
Folget dahero, daß auch die Figur A ⌐ ſeye, dem □ FI.
Welches zu machen ware.

Das

Dritte Buch

Deß Teutsch-redenden

Euclides.



Wort = Erklärungen.

I.

Man saget, daß die Zirckeln einander gleich seynd, wenn sie gleiche halbe, oder gleiche gantze Diametern haben. Fig. I.

II.

Eine gerade Linie berühret einen Zirckel, welche, wenn sie verlängert wird, den Zirckel nicht durchschneidet. Fig. II.

III.

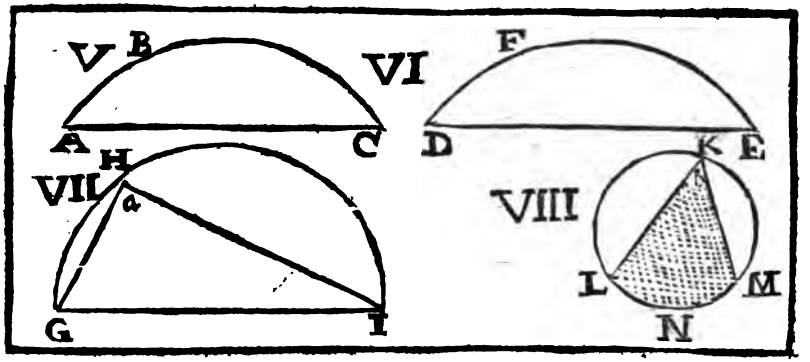
Die Zirckel rühren sich einander an, wenn sie sich einander anrühren, aber nicht durchschneiden. Fig. III.

IV.

Man saget, daß in einem Zirckel die gerade Linien in gleicher Weite von dem Mittel-Punct abstehen, wenn die Bleyrechte Linien, so auff dem Mittel-Punct auff solche gezogen werden, einander gleich lang seynd: auff welche aber eine längere Bleyrechte Linie fället, dieselbe werde weiter von dem Mittel-Punct abstehen.

Die gerade Linien AB, CD stehen in gleicher Weite ab von dem Mittel-Punct E; dann die Bleyrechte EF ⌐, EG ist.

Herentgegen stehet die Linie IK weiter von dem Mittel-Punct E ab, dann die Bleyrechte EH ⌐, als EF, oder EG ist.



V.

Ein Schnitz eines Zirckels (Segmentum Circuli) iſt, welcher von einem Theil des Umbkreiß, und einer geraden Linie beſchloſſen wird. Gleich wie in der Figur ABC, oder V.

VI.

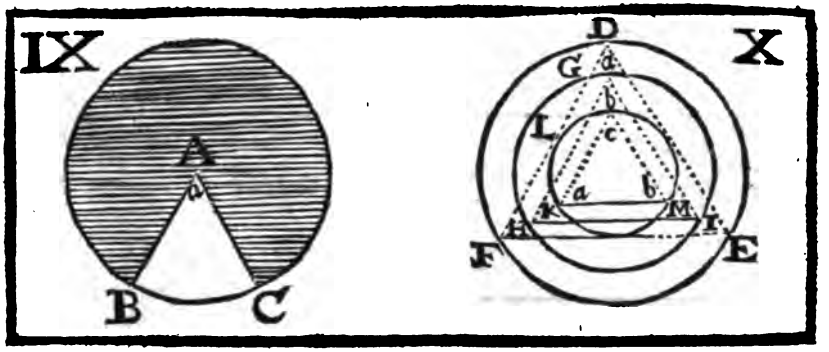
Der Winckel eines Schnitzes (Segmenti Angulus) iſt, welcher von einer geraden Linie (DE) und dem Stück des Umbkreiß (EDF), oder (FED) beſchloſſen wird. Fig. VI.

VII.

In einem Schnitz iſt ein Winckel (In ſegmento Angulus), wenn man in dem Umbkreiß deß Schnitz einen gewiſſen Punct (als wie allhier H) erwählet, und von demſelben in die beyde Ende einer geraden Linie (GI), welche ſothanes Schnitz Baſis iſt, zwey gerade Linien ziehet, (als wie HG, HI); ſo wird der Winckel im Schnitz, der Winckel (GHI, oder a) ſeyn, welcher beſchloſſen iſt von denen zwey geraden (GH, und HI). Fig. VII.

VIII.

Wenn aber zwey gerade Linien (KL, KM), welche den Winckel (b) in einem Schnitz machen, nicht eine gerade Linie zur Baſis, ſondern ein Stück von dem Umbkreiß begriffen (als wie hier das Stück LNM), ſo ſaget man hernach, daß ſolcher Winckel auff bemeldten Umkreiß-Stück ſtehe (Angulus inſiſtens Peripheriæ). Fig. VIII.

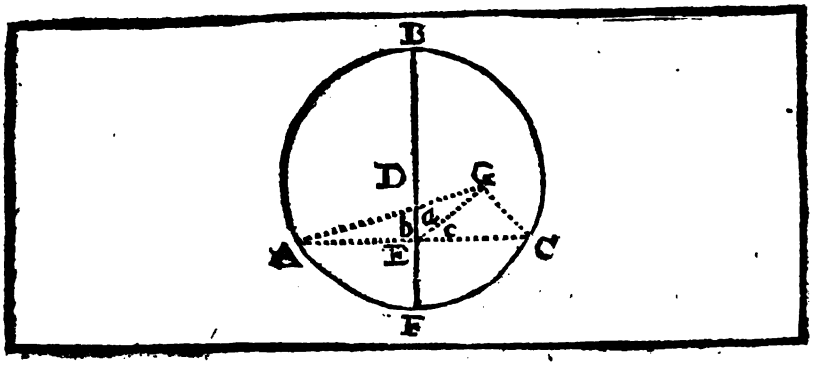


IX.

Außschnitz eines Zirckels (Sector Circuli) ist eine Figur, welche von einem Theil deß Umkreiß (BC), und zweyen halben Diametern (AB, AC) beschrieben wird; sothane zwey Diametern hernach, begreiffen den Außschnitz-Winckel (a) Fig. IX.

X.

Gleichformige Schnitze seynd (FDE, HGI, KLM), welche gleiche Winckeln (a, b, c) begreiffen; oder in welchen die Winckeln (a, b, und c) einander gleich seynd.



Die I. Vorgab.

Handgriff.

Eines gegebenen Zirckels (ABC) Mittel-Punct (D) zu finden.

Handgriff.

Ziehe nach Gefallen die gerade Linie AC.
Zertheile AC entzwey im Mitten E. d. 10. I.
Auß dem Punct E erhöhe die ⊥ FEB. d. 11. I.
Welche den Zirckel in denen Puncten B, und F. berühre.
Die ⊥ FB zertheile auch entzwey im Mitten D. d. 10. I.
So wird der Punct D der geſuchte Mittel-Punct ſeyn.

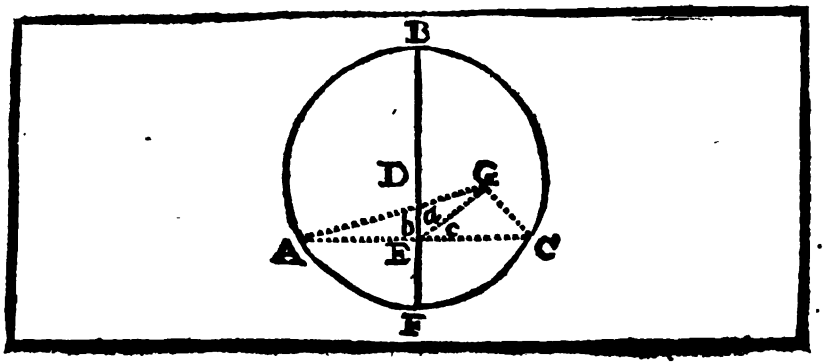
Beweiß.

Erlaubet man es, daß der Mittel-Punct in der Linie FB lige, ſo iſt es gewiß, daß derſelbe der Punct D ſeye; ſonſten ſolten die gerade Linien DB, DF, und alle andere, ſo auß dieſen Puncten herauß an dem Umbkreiß gezogen werden, nicht einander □ ſeyn, ſo ungereimt iſt. d. 15. def. I.

Solte man aber ſagen, daß der Mittel-Punct ſich nicht in der Linie FB befinde, ſondern auſſer derſelben, gleich wie hier in dem Punct G. ſeye

Ziehe alsdann GA, GE, GC zuſammen, und ſage, d. 15. def. I. und den Hand.

Weilen nun in dem △ AEG die zwey Seiten AE, und AG □ ſeyn müſſen denen zwey Seiten EC, und CG im △ CEG,
Und die Seiten EG beyden △ gemein iſt.



So folget, daß der △ AEG ⊓ seye, dem △ CEG. b. 8. 1.

Darumb wird auch der ∠ b + a ⊓ seyn, dem ∠ c.
und folgends beyde, rechte Winckeln seyn. b. 10. def. 1.

Der ∠ b aber, ware allein wegen der ⊥ FEB ein Rechter, b. d. Hand.
also folgete, daß der ∠ b ⊓ wäre, dem gantzen ∠ b + a,
Nemlich ein Theil seinem gantzen, so nicht möglich ist.

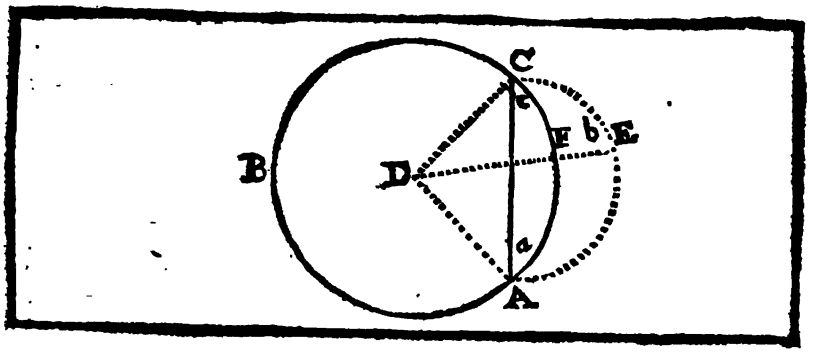
Deßwegen ist nicht der Punct G der Mittel-Punct,
auch kein anderer nicht, ausserhalb dem Punct D.
(dann sonsten eben dieselbe Unmöglichkeit bewiesen würde)

Dahero nothwendig der Punct D in der Linie FB der Mittel-Punct
deß Zirckels ABC seyn muß.

Welches zu machen ware.

Folge.

Wenn in einem Zirckel eine gerade Linie eine andere gerade Linie
just entzwey theilet, und mit derselben zween Rechte ∠
machet, so wird in der ersten Linie der Mittel-Punct
seyn.



Die 11. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn in dem Umbkreiß eines Zirckels (AFCB) zween Puncten (gleich wie AC) nach Gefallen genommen, und mit einer geraden Linie (AC) zuſammen gehangen werden, ſo wird ſolche Linie (AC) gantz und gar innerhalb deß Zirckels (AFCB) fallen.

Beweiß.

Es iſt klar, daß, wenn die gerade Linie die zwey Puncten A, C in dem Umbkreiß zu ihrem Ende behalten will, ſie nothwendig innerhalb, und nicht auſſerhalb, des Zirckels fallen werde.

Solte ſie aber nach Einwendung deß Widerſagers auſſerhalb deß Zirckels fallen, ſo wirdet ſie nothwendig eine Krümme, geſetzt als wie AEC, machen müſſen.

Seye dahero, nach deß Widerſagers Willen, CEA eine gerade Linie (ſo aber in der Warheit nicht ſeyn kan).

Ziehe alsdann auß dem gefundenen Mittel-Punct D die gerade Linien DC, DA, und nach Gefallen die gerade Linie DFE, welche den Zirckel durchſchneidet in F. — d. 1. 3.

Nun wird in dem △ ADC der ∠ c ⌐ ſeyn, dem ∠ a. — [d. 15. def. 1. und 5. 1.

der ∠ b unterdeſſen iſt ⌐, als der ∠ a. — d. 16. 1.

Dahero wird auch der ∠ b ⌐ ſeyn, als der ∠ c.

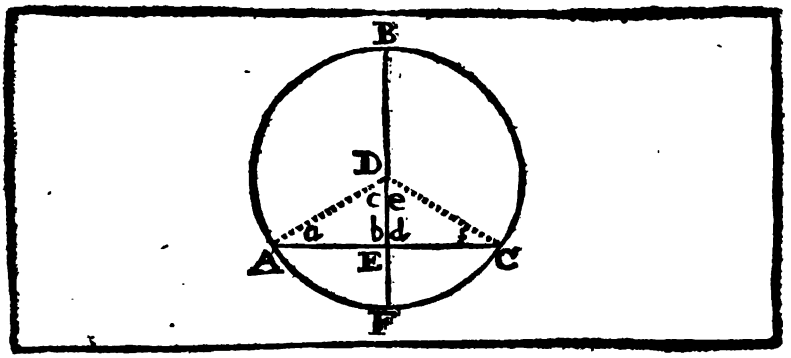
und deßwegen muß die Seiten DC ⌐ ſeyn, als die Seiten DE. — d. 19. 1.

DC aber iſt nur ⌐ dem Theil DF von der gantzen DE. — d. 15. def. 1.

Dahero wäre der Theil DF ⌐, als die gantze Linie DE, welches nicht ſeyn kan.

Alſo iſt klar, daß die Linie AC, gantz innerhalb des Zirckels, und nicht auſſerhalb deſſen fallen kan.

Welches zu beweiſen ware.



Die III. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn in einem Zirckel (ABCF) eine gerade Linie (BF), ſo durch den Mittel-Punct D) gehet, eine andere (AC), welche nicht durch den Mittel-Punct gehet, in zwey gleiche Theil zertheilet (als wie in E): ſo werdet ſie mit derſelben zween rechte Winckeln (bd) machen; und hinwiederumb, wenn ſie mit derſelben zween rechte Winckeln machet, ſo wird ſie auch dieſelbe in zween gleiche Theile zertheilen.

Zubereitung.

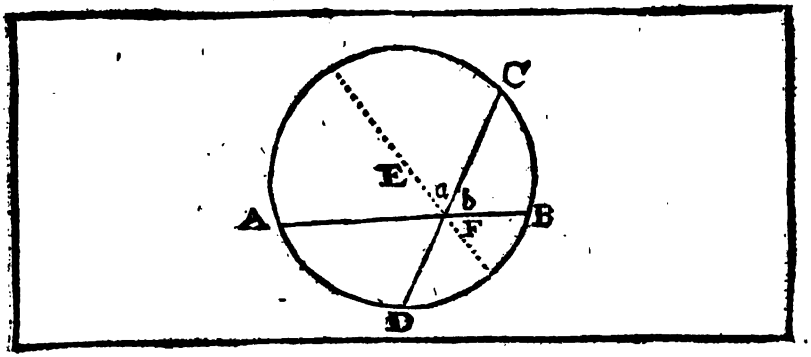
Auß dem Mittel-Punct D hange zuſammen AD, CD.

Beweiß I.

In dem △ ADE iſt die Seiten AD ⊓, der Seiten CD im △ CDE, — S. 15. def. 1.
und die Seiten AE ⊓, der Seiten CE. — d. d. Vorg.
und die Seiten ED iſt beyden △ gemein.
So wird deßwegen der ∠ b ⊓ ſeyn, dem ∠ d. — d. 8. 1.
und folgends werden beyde Rechte ∠ ſeyn. — d. 10. def. 1.

II.

In dem △ ADE iſt die Seiten AD ⊓, der Seiten CD im △ CDE. — d. 15 def. 1.
Dahero wird der ∠ a ⊓ ſeyn, dem ∠ f. — d. 5. 1.
Unterdeſſen iſt auch der ∠ b ⊓, dem ∠ d,
Darumb wird der △ ADE ⊓ ſeyn, dem △ CDE, — d. 26. 1.
und folgends die Linie AE ⊓, der Linie CE.
Welches zu beweiſen ware.



Die IV. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn in einem Zirckel (ABC) zwo gerade Linien (AB, CD) ſich einander durchſchneiden (als wie in F), und doch keine derſelben durch den Mittel-Punct (E) gehet: ſo werden ſich beyde einander nicht zugleich in zwey gleiche Theile zerſchneiden.

Beweiß.

Geſetzt man ſage fort, daß ſich dennoch beyde Linien AB, CD im Punct F zugleich in zwey gleiche Theile zerſchneiden.

So ziehe demnach durch den Mittel-Punct E, und durch den gemeinen Durchſchnitts-Punct F die gerade Linie EF.

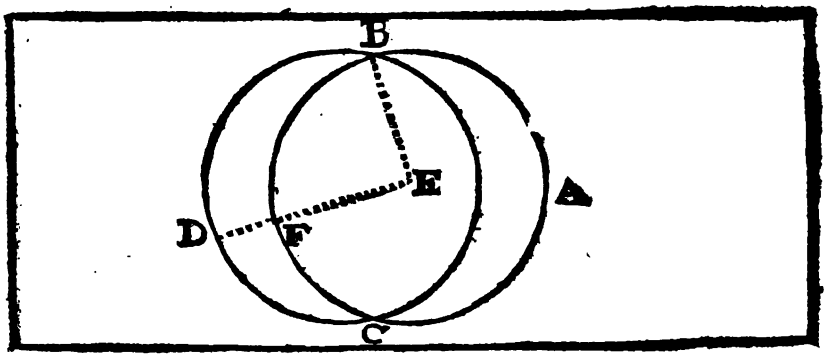
Weilen nun die Linie AB, und DC ſich im Punct F einander gerad ſolten entzwey geſchnitten haben. (durch deß Widerſagers Meinung).

So folgete, daß die Linie EF erſtlich mit der Linie AB einen rechten ∠ a + b, und wiederumb dieſelbe EF, auch mit der Linie DC den rechten ∠ a machen werde. d. 3. 3.

Dieſes aber iſt ungereimbt, nemlich daß der ∠ a + b □ ſeyn ſolte, dem ∠ a: das gantze ſeiner Theilen einem.

Darumb iſt nicht möglich, daß ſich beyde Linien auſſerhalb deß Mittel-Puncts einander können zugleich in zwey gleiche Theile zerſchneiden.

Welches zu beweiſen ware.



Die V. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn zween Zirckeln (ABC, BDC) sich einander durchschneiden (als wie in B, C): so haben solche nicht einen gemeinen Mittel-Punct.

Beweiß.

Gesetzt, man sage, daß der beyden Zirckeln gemeine Mittel-Punct E seye.

So ziehe aus dem Mittel-Punct E in dem Durchschnitts-Punct B die gerade EB, und eben auß F eine andere nach Gefallen, gleich wie ED, welche durch beyde Zirckeln in F, und D gehe.

Alsdann wird in dem Zirckel ABC die Linie EB ⊓ seyn, der Linie EF. 5. 15. def. 1.

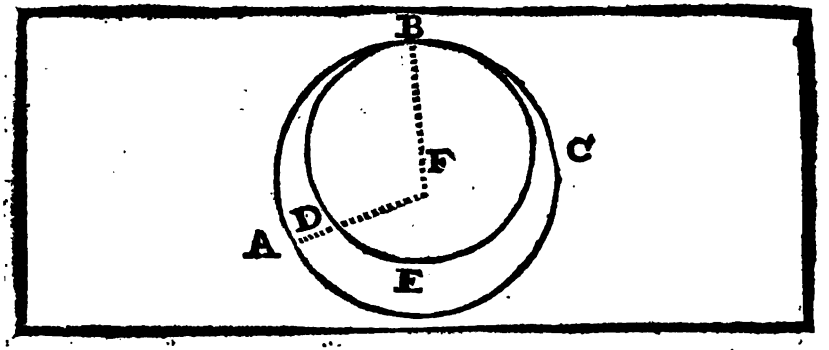
Weilen aber E der gemeine Mittel-Punct seyn solte.

So wird auch in dem Zirckel BDC die Linie EB ⊓ seyn, der Linie ED. 5. 15. def. 1.

Und folgends würde die Linie EF ⊓ seyn, der Linie ED; d. 1. ax. 1.
nemlich der Theil seinem gantzen, so nicht möglich ist.

Dahero haben solche Zirckel nicht einen gemeinen Mittel-Punct, sondern zwey verschiedene.

Welches zu beweisen ware.



Die VI. Vorgab.

Betrachtung.

Zween Zirckel (ABC, BDE), welche ſich inwendig einander anrühren (als wie im Punct B) haben nicht einen gemeinen Mittel-Punct.

Beweiß.

Geſetzt, man ſage, daß der beyden Zirckeln gemeine Mittel-Punct F ſeye.

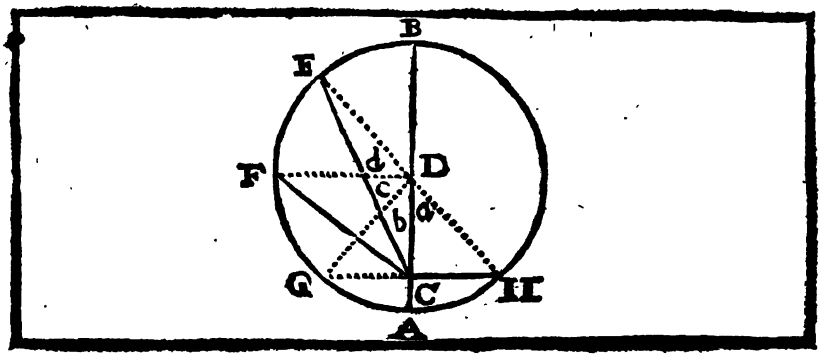
So ziehe auß F, und durch den Anrührungs-Punct B die gerade FB, und eben auß F eine andere nach Gefallen, gleich wie FA, welche durch beyde Zirckeln in D, und A gehe.

Dieſen nach wird in dem Zirckel ABC die Linie BF ⌐ ſeyn, der Linie FA, d. 15. def. 1.
Weilen aber F der gemeine Mittel-Punct ſeyn ſolte;

So wird auch in dem Zirckel BDE die Linie FB ⌐ ſeyn. der Linie FD. d. 15. def. 1.
Und folgends würde die Linie AF ⌐ ſeyn, der Linie FD; d. 1. ax. 1.
Nemlich das gantze ſeiner Theilen einem.
Welches ungereimt iſt.

Dahero iſt es eine Warheit, daß dieſe beyde Zirckeln nicht einen gemeinen Mittel-Punct, ſondern zwey verſchiedene haben.

Welches zu beweiſen ware.



Die VII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn in dem Diameter (AB) eines Zirckels, nach Gefallen ein Punct (C), welcher nicht deß Zirckels Mittel-Punct (D) iſt, genommen wird, und von demſelben Punct (C) etliche gerade Linien (gleich wie hier CE, CF, CG,) in dem hohlen Umbkreiß deß Zirckels gezogen werden:

1. So iſt unter allen dieſen gezogenen Linien die längſte (CB), welche durch den Mittel-Punct (D) gehet.
2. Die kürtzeſte aber (CA) iſt der übrige Theil von ſolchen Puncten (C) an, biß in den Umbkreiß (A).
3. Unter denen aber (CE), je näher eine derſelben (CB), welche durch den Mittel-Punct gehet, je länger ſie auch iſt, je weiter ſie (FC) aber von ſolcher, je kürtzer. (alſo iſt CE länger, als CF: und CF länger, als CG).
4. So können auch nicht mehr, als nur zwo gleiche Linien (CG, CH) von dieſem Punct (C) zu beyden Seiten der kürtzeſten (CA), oder der längeſten (CB) in den hohlen Umbkreiß gezogen werden.

Zubereitung.

Ziehe ED, FD, GD mit geraden Linien zuſammen.

Beweiß I.

In dem △ CDE ſeynd die zwo Seiten CD, DE ⌐, als die eine Seiten CE. d. 20. I.

Diſ zwo Seiten CD, DE ſeynd aber ⌐, der Linie CB. (dann DB iſt ⌐, ED: und CD iſt beyden gemein,) d. 15. def. I.

Folget dann, daß die Linie CB ⌐ ſeye, als die Linie CE. u. ſ. f.

II.

Jn dem △ CGD ſeynd die zwo Seiten GC, CD ⌐, als die eine Seiten GD. d. 20. 1.

der Seiten GD aber, iſt ⌐ die Linie AD. d. 15. def. 1.

Dahero ſeynd auch die zwo Seiten GC, CD ⌐, als die Linie AD.

Wenn man unterdeſſen beyderſeits hinweg nimmet die gemeine Linie CD.

So wird überbleiben die Linie GC ⌐, als die Linie CA. u. ſ. f.

III.

Jn dem △ DEC iſt die Seiten DE ⌐, der Seiten DF im △ DFC. und die Seiten DC iſt beyden △ gemein. d. 15. def. 1.

der ∠ d + c + b aber iſt ⌐, dann der ∠ c + b.

Folget, daß auch die Baſis CE ⌐ ſeye, als die Baſis CF. d. 24. 1.

und ſ. ſ.

IV.

Mache vorhero den ∠ a ⌐, dem ∠ b. d. 23. 1.

und ziehe zuſammen C, H.

Jn dem △ DHC iſt die Seiten DH ⌐, der Seiten DG im △ DGC, d. 15. def. 1.

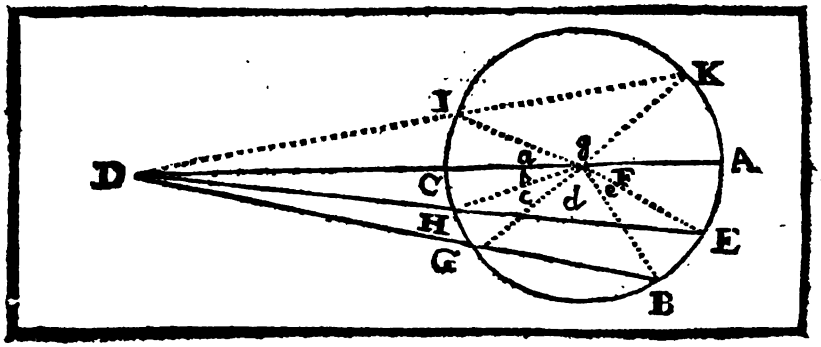
und die Seiten CD iſt beyden △ gemein,

der ∠ a iſt auch ⌐ gemachet worden, dem ∠ b.

Darumb wird die Baſis CH ⌐ ſeyn, der Baſis CG, d. 4. 1.

alſo können von dem Punct C keine andere gleiche denen zweyen Linien CG, CH auff beyden Seiten gezogen werden, dann ſolche entweder von der Linie CA, welche durch den Mittel-Punct gehet, abweichen, oder zu ſolcher nähern, alsdann müſſten ſie entweder kürtzer, oder länger werden, nach dem dritten Theil dieſes Beweiß.

Welches zu beweiſen ware.



Die VIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn auſſerhalb eines Zirckels (ABCIK) nach Gefallen ein Punct (D) genommen wird, und von ſolchen etliche gerade Linien (als wie DA, DE, DB) in den Zirckel gezogen werden, deren eine durch den Mittel-Punct (F) gehet, die andere aber nach Gefallen:

1. So iſt unter allen denen, welche hineinwerts in den hohlen Umbkreiß gezogen werden, dieſelbe die längſte, ſo durch den Mittel-Punct (F) gehet.
2. Nachmahls, welche dieſer näher, die iſt auch länger, als eine andere, welche weiter darvon iſt (alſo iſt ED länger, als BD).
3. Unter denen aber, ſo von dem Punct (D) herauſswerts auff dem gebogenen Umbkreiß gezogen werden; iſt ſolche die kürtzeſte (DC), ſo von ſolchem Punct auß (D), an dem Diameter (CA) ſtoſſet.
4. Welche hernach je weiter von dieſer, je länger ſie auch iſt (als wie GD iſt länger, dann HD).
5. So können auch nicht mehr, als nur zwo gleiche Linien auß dieſem Punct (D) oder auff dem gebogenen (gleich wie DH, DI), oder in dem hohlen Umbkreiß (gleich wie DE, DK) zu beyden Seiten der kürtzeſten (CD), oder der längſten (AD) fallen.

Zubereitung.

Ziehe mit geraden Linien zuſammen FE, FB, FG, FH.

Beweiß.

I.

In dem △ DEF ſeynd die zwo Seiten DF, FE ⌜, als
die eine Seiten DE. b. 20. 1.
Denen Linien DF, FE aber iſt ⌐, die Linie DA. (b. 15. def. 1.
Darumb wird die Linie DA ⌜ ſeyn, als die Linie DE. u. ſ. ſ. und 2. ax. 1.

II.

In dem △ DFE iſt die Seiten EF ⌐, der Seiten FB im △ DFB. b. 15. def. 1.
Und die Seiten DF iſt beyden △ gemein.
Der ∠ c + d + c + b aber iſt ⌜, als der ∠ d + c + b.
Folget, daß auch die Baſis ED ⌜ ſeye, als die Baſis BD. b. 24. 1.

III.

In dem △ DFH, ſeynd die zwo Seiten DH, HF ⌜, als
die eine Seiten DF. b. 20. 1.
Wann man beyderſeits die gleichen Linien FC, FH hinweg nimmet,
So wird überbleiben die Linie HD ⌜, als die Linie CD: und
alſo von denen andern.

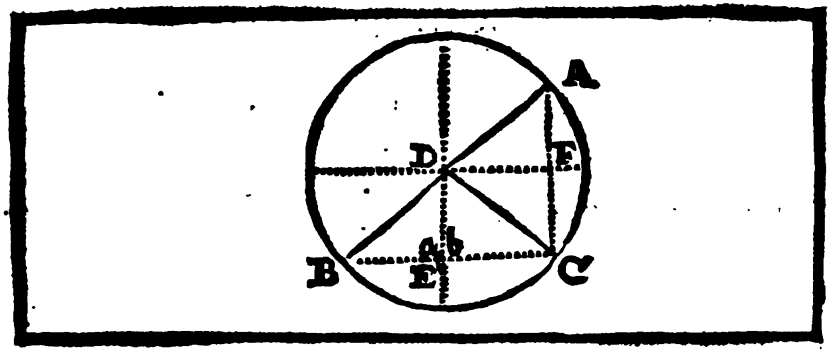
IV.

In dem △ DFG ſeynd die zwo innere Seiten FH, HD ⌝,
als die zwey äuſſere Seiten FG, GD, b. 21. 1.
wenn man beyderſeits die zwey gleiche Seiten FG, FH
darvon ziehet. b. 15. def. 1.
So bleibet über die Seiten DH auch ⌝, als die Seiten DG.

V.

Mache den ∠ a ⌐, dem ∠ b, und den ∠ a + g ⌐,
dem ∠ b + c + d + e. b. 23. 1.
Nun iſt in dem △ DIF die Seiten IF ⌐, der Seiten HF im △ DHF, b. 15. def. 1.
und die Seiten DF iſt beyden △ gemein,
und der ∠ a ⌐, dem ∠ b.
Folget, daß auch die Baſis DI ⌐ ſeye, der Baſis DH. b. 4. 1.
Auff ſolche Art wird auch im △ DKF die Baſis DK ⌐
ſeyn, der Baſis DE im △ DEF. u. ſ. f.

Welches zu beweiſen ware.



Die IX. Vorgab.

Betrachtung.

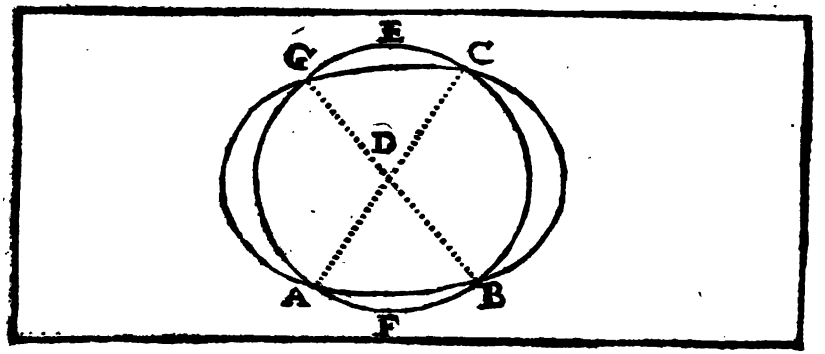
Wenn in einem Zirckel (ABC) ungefehr ein Punct (D) genommen wird, und von ſolchem mehr, dann zwo gleich lange Linien (als wie DA, DB, DC) im Umbkreiß können gezogen werden: ſo iſt ein ſolcher genommener Punct der Mittel-Punct.

Zubereitung.

Hange BC, CA mit geraden Linien zuſammen.
Zertheile BC, CA in mitten in E, und in F. d. 10. I.
Ziehe letzlich durch FD, und ED gerade Linien, biß in den Umbkreiß.

Beweiß.

Der △ DEB iſt ⊓, dem △ DEC.
deßwegen iſt auch der ∠ a ⊓, dem ∠ b. {d. 8. Vorg. und die Zub. und 8. I.
und folgends ſeynd dieſe zween ∠ a und b, beyde rechte ∠. d. 10. def. I.
Dahero wird in der Linie ED der Mittel-Punct ſeyn. d. Cor. I. 3.
Nach ſolchem Beweiß wird auch in der Linie DF der Mittel-Punct ſeyn.
An zweyen Oertern kan aber der Mittel-Punct nicht ſeyn.
(ſonſten wären in einem Zirckel die gerade Linien, welche auß einem Mittel-Punct in dem Umbkreiß gezogen werden, nicht einander gleich, wider) d. 15. def. I.
Dahero iſt nöthig, daß der Mittel-Punct in dem gemeinen Durchſchnitz-Punct D ſeye.
Welches zu beweiſen ware.



Die X. Vorgab.

Betrachtung.

Ein Zirckel (AFBE) durchſchneidet einen andern nicht mehr, als in zweyen Puncten.

Will man es nicht geſtehen, ſo ſeye dann (wann es möglich iſt) daß einer den andern mehr dann in zwey Puncten, gleich wie allhier der Zirckel AFBE, den Zirckel ABCG in denen vier Puncten ABCG durchſchneide.

Zubereitung.

Finde alsdann den Mittel-Punct D deß Zirckels AFBE. und ziehe darauß in die Durchſchnitz-Puncten A, B, C, G die grade Linien DA, DB, DC, DG. d. 1. 3.

Beweiß.

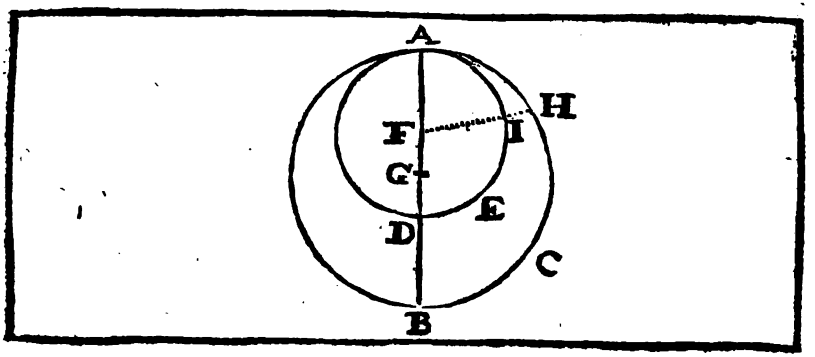
Die Linien AD, BD, CD, GD ſeynd einander ◻ d. 15. def. 1.

Dahero werden beyde Zirckel einen gemeinen Mittel-Punct D. haben. d. 9. 3.

Dieſes aber kan nicht ſeyn; daß nemlich zween einander durchſchneidende Zirckeln einen gemeinen Mittel-Punct haben ſolten. d. 5. 3.

Deßwegen iſt es eine Warheit, daß ſich zwey Zirckeln nicht mehr, dann bloß in zwey Puncten allein durchſchneiden.

Welches zu beweiſen ware.



Die XI. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn ſich zwey Zirckeln (ABC, ADE) inwendig einander berühren (als wie hier in A), und durch ihre beyde Mittel-Puncten (F G) eine gerade Linie (BA) gezogen wird: ſo gehet ſolche, wann ſie verlängert wird, durch den Berührungs-Punct (A).

Zweiffelt man daran, und ſaget, daß die Linie BA zwar durch die zween Mittel-Puncte F, G, doch aber nicht durch den Anrührungs-Punct A, ſondern auff eine andere Seiten, als wie durch H. gehe.

Zubereitung.

Ziehe dann ein ſolche gerade Linie, als wie BDGFH (wann es möglich iſt,) welche den Zirckel ADE im Punct I. durchſchneidt.

Beweiß.

Dieweilen die Linie BG FH, als eine vermeinte gerade Linie durch die Mittel-Punct G, und F gehet.

So wird die Linie FH die kürtzeſte ſeyn. 7. 3.

Und deßwegen wird die Linie FA Γ, als FH ſeyn;

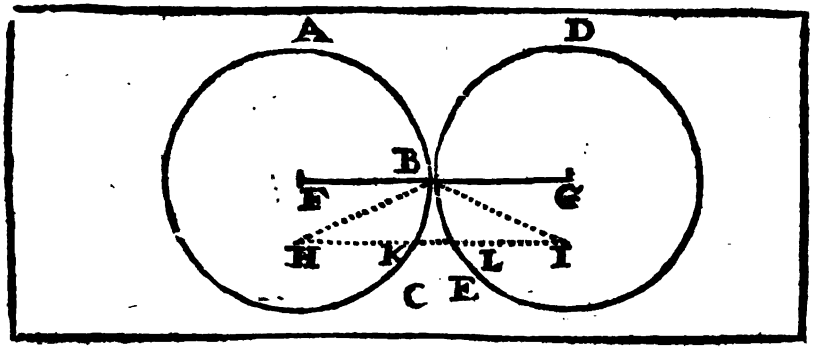
Die Linie FA aber, iſt ⌐, der Linie FI. 15. def. 1.

Folget dann, daß dieſelbe FI Γ wäre, als FH;

Nemlich der Theil ſeinem gantzen, ſo ungereimbt iſt.

Iſt derohalben nöthig, daß die Linie BA durch den Anrührungs-Puncten A, und nicht anderwertig hinauß gehe.

Welches zu beweiſen ware.



Die XII. Vorgab.

Betrachtung.

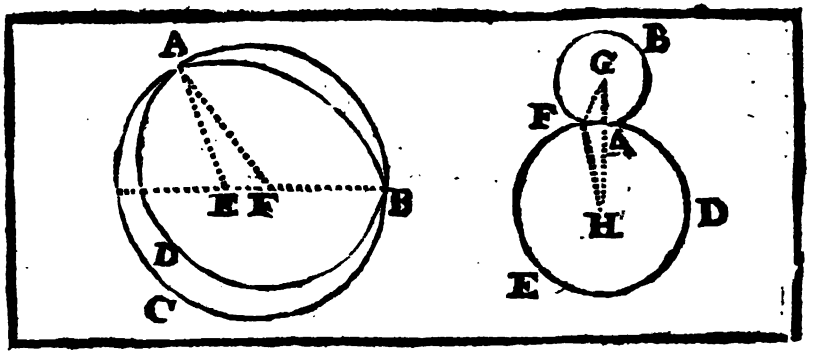
Wenn ſich zween Zirckeln (ABC, EBD) außwendig einander berühren (als wie in B) und eine gerade Linie durch dero beyde Mittel-Puncte (F, G) gezogen wird: ſo gehet ſolche auch durch ihren Anrührungs-Puncten (B).

Welcher einwenden wolte, ſagend, daß man die zwey Mittel-Puncte dergeſtalten verſetzen könte, gleich wie in H und I; und die gerade Linie HI auß ihrem Mittel-Punct dergeſtalten ziehen, daß ſie nicht durch den Anrührungs-Punct gehe, ſondern anderwertig die Zirckeln, als wie in K, L durchſchneide.
Ziehe alsdan HB, und IB zuſammen.

Beweiß.

In dem △ HIB ſeynd die zwo Seiten HB, und BI ⌐, als die Seite HI. d. 20. 1.
Und weilen die Puncte H, und I die Mittel-Puncte ſeyn ſolten,
So wird KH ⌐ ſeyn, BH, und IL ⌐, BI. d. 15. def. 1.
Dahero müſſen die Linien HK, und LI auch ⌐ ſeyn, als die gantze Linie HI, welches ungereumt iſt.
Indeme noch das Stück KL darvon abgehet.
Darauß ſchlieſſet man, daß alſo die gerade Linie FG, ſo durch die zween Mittel-Punct gezogen, nothwendig durch den Anrührungs-Puncten B gehen müſſe.

Welches zu beweiſen ware.



Die XIII. Vorgab. Betrachtung.

Ein Zirckel anrühret einen andern Zirckel, nur an einem Puncten, es seye gleich in- oder außwendig.

Gesetzt (wofern es möglich ist), daß der Zirckel DAB den Zirckel ABC in denen inwendigen zween Puncten A und B anrühre: so ziehe durch ihre Mittel-Puncte E, F die gerade Linie EFB: und hange EA, FA zusammen.

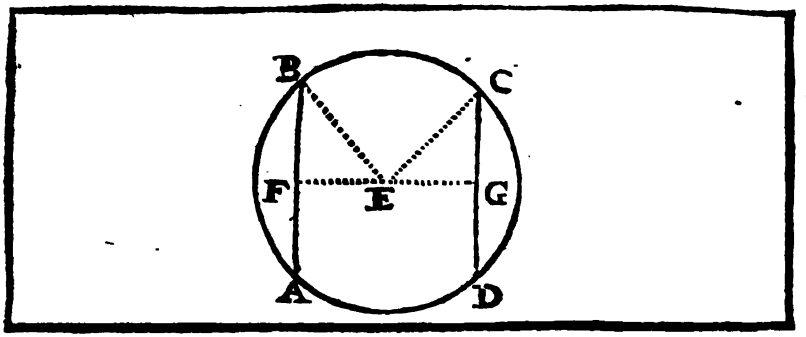
Beweiß.

I.

In dem Zirckel ABD ist nunmehr AF ⌐, FB. d. 15. def. 1.
setze beyderseits hinzu die gemeine Linie EF.
So werden die zwo Linien EF + FA ⌐ seyn, der Linie EB.
Unterdessen seynd in dem △ AFE die zwo Seiten EF,
und FA ⌐, als die dritte Seiten EA. d. 20. 1.
Folget dann, daß auch EB ⌐ wäre, als AE: so ungereimt ist,
dann die Linie EB ⌐, ist der Linie AE. d. 15. def. 1.

II.

Solten sich herentgegen die zween Zirckel CBA, und EDA nicht
in einem, sondern in zwenn Puncten A, und F außwendig anrühren:
so ziehe (wann es möglich ist) auß denen Mittel-Puncten G, H,
und durch ihren einen Durchschnitts-Punct A, die gerade Linie
GAH, und hange GF, und FH zusammen.
So werden in dem △ GFH die Linien GF, FH ⌐ seyn, als GH. d. 20. 1.
Unterdessen ist GF ⌐ der GA, und FH ⌐, der AH: d. 15. def. 1.
Darum müsten auch GA + HA ⌐ seyn als GH.
So nicht seyn kan, daß nemlich die Theile sammentlich ⌐ wären,
als ihr gantzes: darauß schliesset man, daß ein Zirckel den
andern nicht mehr als nur in einem Puncten berühre.
Welches zu beweisen ware.



Die XIV. Vorgab. Betrachtung.

In einem Zirckel (ABCD) stehen gleich gerade Linien (AB, DC) in gleicher Weite vom Mittel-Punct (E) ab: und hingegen gerade Linien, so in gleicher Weite vom Mittel-Punct abstehen, die seynd einander gleich.

Zubereitung.

Lasse auß dem Mittel-Punct E die zwo ⊥ EF, EG auff die Linien AB, CD fallen, welche sie gleich entzwey theilen, werden. Hange BE, und EC zusammen. d. 12. 1. d. 3. 3.

Beweiß.

I.

Das □ auff EB ist ⊓, denen zwey □ auff EF, und FB. und das □ auff EC ist ⊓, denen zwey □ auff EG, und GC. d. 47. 1.

Wann man von denen gleichen □, so auff denen gleichen Linien EB, und EC stehen, die gleiche □ auff denen gleichen Linien FB, und GC darvon abziehet. d. 15. def. 1.

So wird überbleiben das □ auff FE ⊓, dem □ auff EG; das ist, die ⊥ FE ⊓ der ⊥ EG. d. 4. an. 46. 1.

Dahero stehen AB, und DC in gleicher Weite von dem Mittel-Punct E ab. d. 4. def. 3.

II.

Die Linie EF ist ⊓, der Linie EG, und die Linie BE ist ⊓, EC, d. d. Vor. u. 15 def. 1.

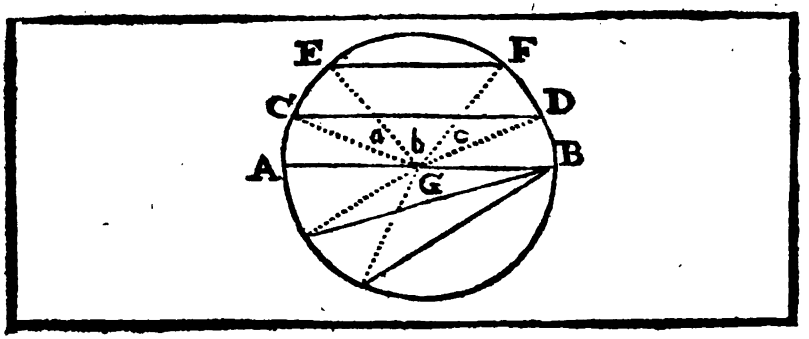
Unterdessen ist das □ auff EB ⊓, denen □ auff FE, und BF. Und das □ auff EC ist ⊓, denen □ auff EG, und GC. d. 47. 1.

Wann man beyderseits von denen gleichen □ auff BE, und EC die gleiche □ auff FE, und EG darvon abziehet,

So wird überbleiben das □ auff der Linie FB ⊓, dem □ auff der Linie GC: das ist, die Linie FB ⊓ der Linie GC. d. 4. an. 46. 1.

Dahero wird auch die doppelte AB ⊓ seyn der doppelten DC. d. 6. ax.

Welches zu beweisen ware.



Die XV. Vorgab.

Betrachtung.

In dem Zirckel (AEFB) iſt der Diameter (AB) die längſte Linie, hernachmahln, welche dem Mittel-Punct (G) näher iſt (als wie CD), die iſt auch länger, als eine andere (EF), welche weiter darvon abſtehet.

Zubereitung.

Ziehe CG, DG. Item EG, FG zuſammen.

Beweiß.

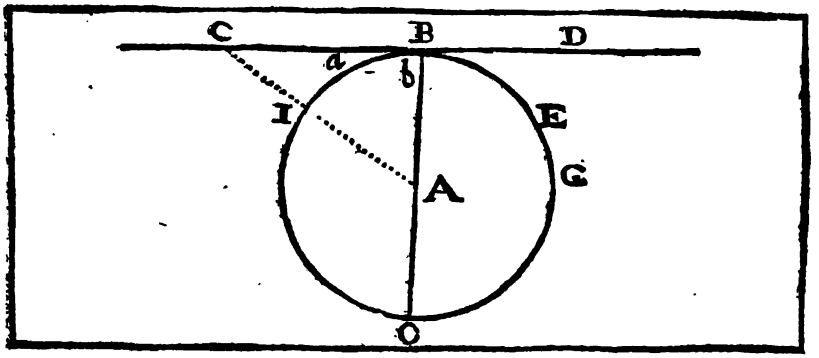
I.

In dem △ CGD ſeynd die zwo Seiten GC, und GD ⌜, als die dritte Seiten CD. b. 20. 1.
Die Seiten GC, und GD aber, ſeynd ⌐ dem Diameter AB. b. 15. def. 1.
Darumb wird der Diameter AB ⌜ ſeyn, als CD. u. ſ. f.

II.

In dem △ CGD ſeynd die zwo Seiten GC, und GD ⌐, denen zwo Seiten GE, und GF in dem △ EGF. b. 15. def. 1.
der ∠ a + b + c iſt aber ⌜, als der ∠ b. b. 9. ax.
Darumb wird folglich die Baſis CD ⌜ ſeyn, als die Baſis EF. b. 24. 1.

Welches zu beweiſen ware.



Die XVI. Vorgab. Betrachtung.

Wenn am Ende (B) eines Diameters (OB) eine Bleyrechte Linie (CBD) gezogen wird.

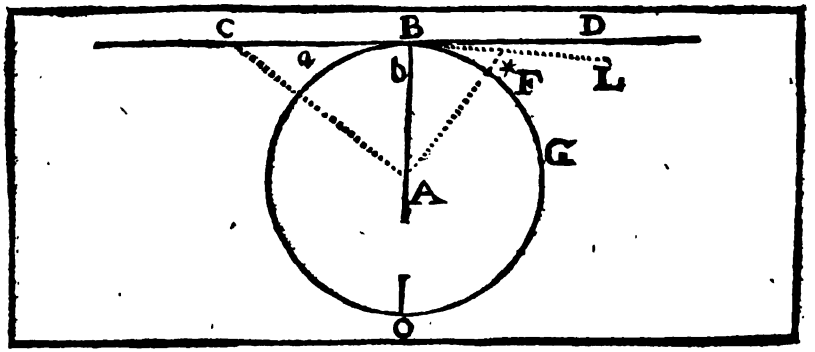
1. So fahlet ſolche auſſerhalb deß Zirckels.
2. So kan keine andere zwiſchen dieſer Bleyrechten Linie, und dem Umbkreiß (IBEG) gezogen werden, die nicht ſonſten in den Zirckel fallen ſolte.
3. Und der Winckel deß halben Zirckels (OBEG), (ſo gemacht iſt von dem Diameter und dem Umbkreiß,) iſt gröſſer, als ein jeder ſcharffer geradtliniſcher Winckel.
4. Der übrige Winckel aber, (DBEG) ſo gemacht iſt von der Bleyrechten Linie, und dem Umbkreiß, iſt kleiner, als ein jeder ſcharffer geradtliniſcher Winckel.

Zubereitung.

Ziehe auß dem Mittel-Punct A nach Gefallen in die ∠ CBD die gerade Linie AIC, welche den Umbkreiß in I durchſchneidet, und die ∠ in Puncten C berühre.

Beweiß. I.

Weilen die Seiten AC den rechten ∠ a + b unterſpannet, ſo wird die Seiten AC ⌜ ſeyn, als AB, oder die Gleiche AI. d. 19. 1.
Der letzte Punct B aber, der Linie AB, ſtehet am Umbkreiß, d. d. Vorg.
Dahero wird auch der letzte Punct I an dem Umbkreiß ſeyn,
Und folgends wird der Punct C, der Linie AC, nothwendig auſſerhalb deß Umkreiß ſtehen müſſen.
Und alſo beweiſet man, daß alle andere genommene Puncten in der Linie CBD, außgenommen den einigen Punct B, welcher den Umbkreiß berühret, auſſerhalb deß Circkels fahlen werden.



II.

Geſetzt, man ſage, daß man gar wol zwiſchen dem Umkreiß, und der ⌞ CBD noch eine andere gerade Linie, gleich wie BL ziehen könne, welche in den Zirckel nicht falle, ſondern ſelben bloß berühre.

Ziehe dahero auß A auff die Linie BL die ⌞ A* (wann es möglich iſt). d. 12. I.
So iſt in dem △ AB* die Seiten AB Γ, als die Seiten A*. d. 19. I.
Der Punct B iſt aber noch an dem Umbkreiß deß Zirckels, d. d. Vorg.
Alſo wird der Punct *, und folgends alle andere Puncten der Linie BL, von dem B angegen L, inwendig in den Zirckel fallen müſſen.
Dahero nicht möglich iſt zwiſchen BD und dem Umbkreiß eine gerade Linie zu ziehen, welche nicht in den Zirckel falle.

III.

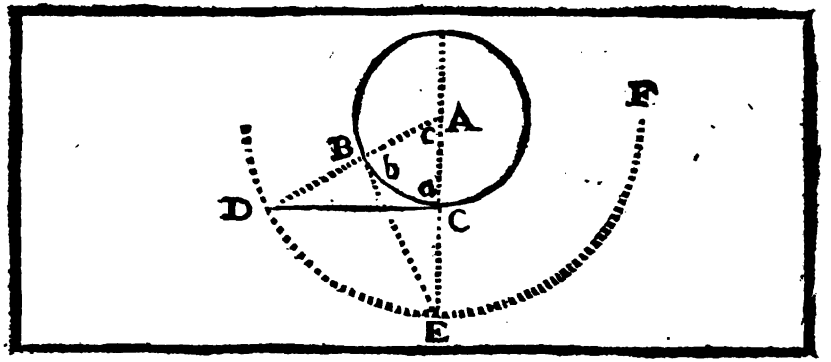
Wann man glaubet, daß noch ein gröſſerer ſcharffer ∠, als der ∠ OBFG deß halben Zirckels könne gemacht werden: ſo würde nöthig ſeyn, daß man eine gerade Linie zwiſchen den gebogenen Umbkreiß BFG, und der ⌞ BD ziehen müſſte, ſolches aber iſt unmöglich, dann eine ſolche gezogene Linie ſtracks in den Zirckel fallen würde. So wider das vorgehende iſt.

IV.

Eben müſſte man zwiſchen der ⌞ CBD, und dem gebogenen Umbkreiß BFG eine neue gerade Linie ziehen, wenn man einen kleinern Anrührungs-∠, als den ∠ DBFG machen wolte; diß aber kan auß dem vorbewieſenen auch nicht geſchehen.

Folge.

Eine gerade Linie, welche auß dem Ende deß Diameters Bleyrecht gezogen wird, berühret den Zirckel nur in einem Puncten.
Welche aber den Zirckel in zwey Puncten anrühret, dieſelbe fället innerhalb deß Zirckels, nach der 2. 3.



Die XVII. Vorgab.

Handgriff.

Aus einem vorgegebenen Puncten (D) eine gerade Linie DC zu ziehen, welche einen gegebenen Zirckel (BCA) anrühre.

Handgriff.

Auß dem Mittel-Punct A mit der Weite AD beſchreibe einen Zirckel-Bogen DEF, und ziehe zuſammen D, A.

Alsdann auß dem Punct B ziehe die ⊥ BE, biß an den geſchriebenen Zirckel-Bogen E; und hange zuſammen E, A. d. 12. 1.

Letzlich ziehe in C die gerade Linie DC, welche den Zirckel ABC in dem einigen Punct C anrühren werde.

Beweiß.

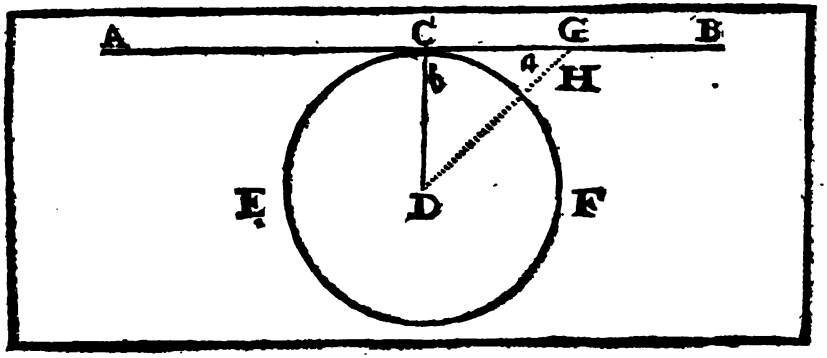
In dem △ AEB ſeynd die Seiten AE, und AB ⊓, denen Seiten AD, und AC in dem △ ADC, und der ∠ c iſt beyden △ gemein. d. 15. def. 1.

Darumb wird der △ AEB ⊓ ſeyn, dem △ ADC. d. 4. 1.

Weilen aber der ∠ b ein rechter iſt, alſo wird auch der ∠ a ein rechter ſeyn. d. d. Hand.

Und folgends wird die gerade Linie CD den Zirckel in dem Punct C berühren. d. 16. Cor. 3.

Welches zu machen ware.



Die XVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn eine gerade Linie (AB) einen Zirckel (ECF) anrühret, und von dem Mittel-Punct (D) eine gerade Linie zu dem Anrührungs-Punct (C) gezogen wird: so stehet solche Linie (DC) Bleyrecht auff der anrührenden Linie (AB).

Beweiß.

Will mans nicht gestehen, sondern einwenden, daß eine andere, gleich wie DG, Bleyrecht auff der Linie AB stehe.

So folget, daß der ∠ a ein rechter seye. d. 10. def. I.

Und deßwegen wird der ∠ b ⌝ seyn müssen, d. 17. Cor. I. I.

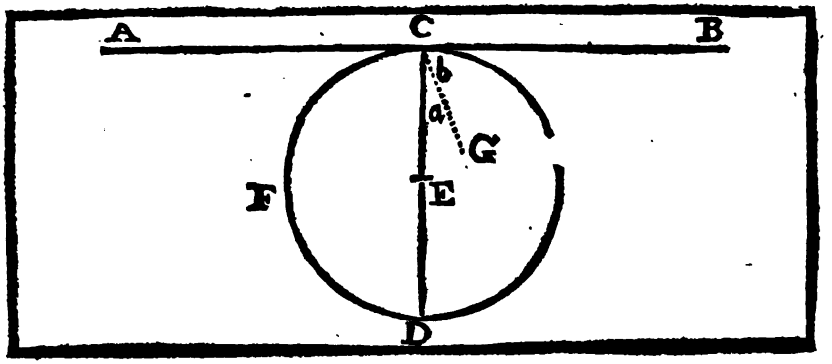
Und hingegen die Seiten DC ⌜ als die Seiten DG. d. 19. I.

Die Linie DC ist unterdessen ⊥ der Linie DH. d. 15. def. I.

Dahero müsste DH (so nur ein Theil von DG) ⌜ seyn, als die gantze DG, welches unvereimt ist.

Deßwegen schliesset man, daß die Linie DC die Bleyrechte allein, und keine andere dieselbe seyn könte.

Welches zu beweisen ware.



Die XIX. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn eine gerade Linie (AB) einen Zirckel (DFC) anrühret, und man auß ſolchem Anrührungs-Punct (C) eine andere Linie Bleyrecht (als wie CED) ziehet, ſo wird in der gezogenen Bleyrechten Linie (CD) deß Zirckels Mittel-Punct ſeyn.

Beweiß.

Wer es nicht glauben wolte, ſagend, der Mittel-Punct möchte wohl anderwertig, gleich wie in G, geſetzt werden.

So hange alsdann G, C zuſammen.

Darauff folget, daß die Linie GC müſſte auff der Linie AB ⊥ ſtehen. d. 18. 3.

Und der ∠ b. ein rechter ſeyn. d. 10. def. 1.

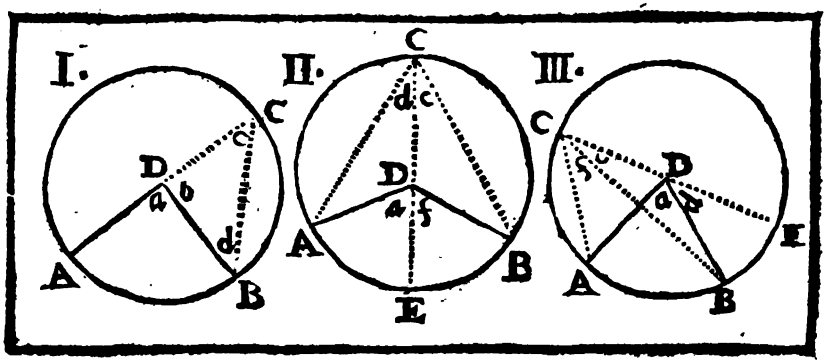
Die Linie CD aber, ſtehet durch die Vorgab ⊥ auff der Linie AB.

Deßwegen wird auch der ∠ b + a ein rechter ſeyn müſſen. d. 10. def. 1.

Und dahero ſolte der ∠ b ⊓ ſeyn, dem ∠ b + a, ein Theil ſeinem gantzen, ſo nicht möglich iſt.

Dahero iſt es für eine Warheit anzunehmen, daß in der ⊥ CD der Mittel-Punct ſeyn müſſe, und nicht anderwertig.

Welches zu beweiſen ware.



Die XX. Vorgab.

Betrachtung.

In einem Zirckel auff einerley Umbkreiß-Stück oder Bögen (gleich wie AB) iſt der Mittel-Puncts-Winckel (a) noch einmahln ſo groß, als der Winckel (c), welcher auff bemeldtem Umbkreiß-Stück ſtehet.

Dreyerley Fähle begeben ſich in dieſer Vorgab.

Erſtlich, wenn die Linien AD, und DC in einer geraden Linie AC fort ſtehen.

Beweiß I.

Dieweilen im △ ADB die Seiten CD verlängert iſt in A.
ſo wird der ∠ a ⊓ ſeyn, denen zween ∠ c, und d. d. 32. I.
Die zween ∠ c, und d aber ſeynd einander ⊓ wegen gleicher Seiten, d. 15. def. I.
Darumb wird deß Mittel-Puncts ∠ a noch einmahlen und 5. I.
ſo groß ſeyn, als der ∠ c.

II.

Wenn die gerade Linien, ſo den ∠ begreiffen, weder in einer geraden Linie fort ſtehen, noch ſich einander durchſchneiden, als wie AD. AC. BD. BC.

So ziehe durch die ∠ C, und D die gerade Linie CDE,
Demnach wird der ∠ a noch einmahlen ſo groß ſeyn, als der ∠ d. d. d. Vor.
auch der ∠ f. wird noch einmahln ſo groß ſeyn, als der ∠ c.
Letzlich wird auch der ∠ a + f noch einmahln ſo groß ſeyn,
als der ∠ d + c. (dann klar iſts, wann zwey Gröſſe, andern zweyen Gröſſen, ſo zweymal gröſſer ſeynd, eine jede der Seinen, hinzu geſetzt werden, daß auch die Summa der einen Gröſſe zweymahlen gröſſer ſeye, als die Summa der andern.

III.

Wann ſich die Linien AD, BC einander durchſchneiden,

So ziehe auß C durch D eine gerade Linie CDE biß in den Umbkreiß.

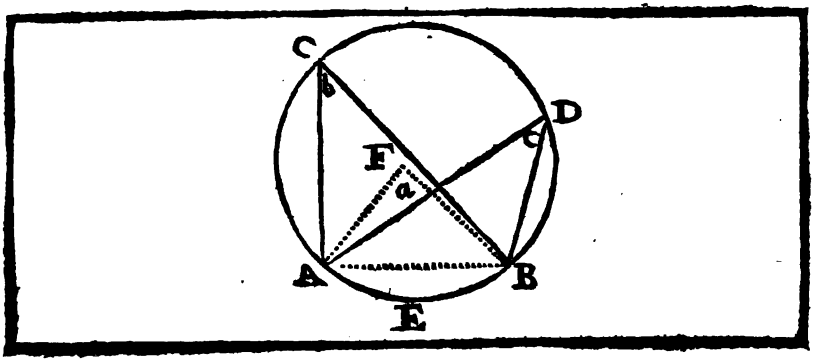
Nunmehro iſt nach dem erſten Beweiß dieſer, der ∠ a ⊸ d doppelt,
oder noch einmahl ſo groß, als der ∠ f ⊸ c.
(dann ſie auff einerley Schnitze AE ſtehen)

So iſt auch der ∠ d zweymahlen ſo groß, als der ∠ c.
(dann ſie auch auff einerley Schnitze BE ſtehen)

Wann man nun dieſe ∠ d, und c auß ihren gantzen ∠ a ⊸ d,
und f ⊸ c abziehet,

So iſt klar, daß auch der überbliebene ∠ a noch einmahln
ſo groß, oder doppelt ſeyn werde, deß überbliebenen ∠ f. d. 15. ax.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXI. Vorgab.

Betrachtung.

In einem Zirckel (ABC) seynd die Winckel (b und c), welche in einerley Schnitze (ACDB) stehen, einander gleich.

Zubereitung.

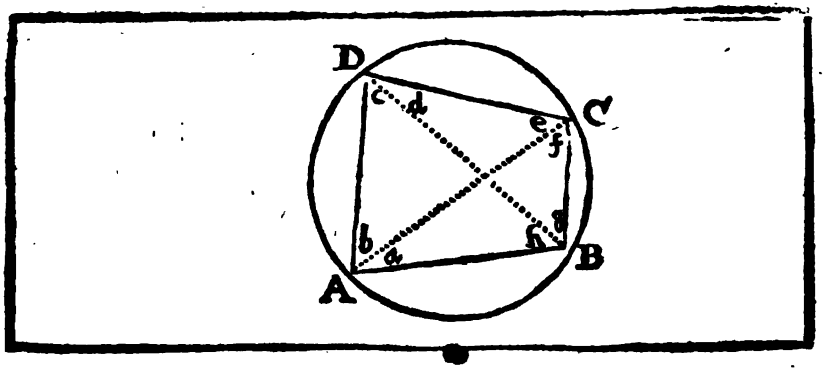
Ziehe auß dem Mittel-Punct F, die Puncten A, B mit geraden Linien zusammen.

Beweiß.

Der ∠ a ist so wohl doppelt deß ∠ b, als deß ∠ c, d. 20. 3.

Darumb wird der ∠ b ⊓ seyn dem ∠ c. d. 7. ax.

Welches zu beweisen ware.



Die XXII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn eine vierſeitige geradliniſche Figur (ABCD) in einem Zirckel eingeſchrieben wird: ſo ſeynd die zween Winckeln (c + d und h + g oder e + f, und b + a), welche über Eck einander über ſtehen, zwey en rechten Winckeln gleich.

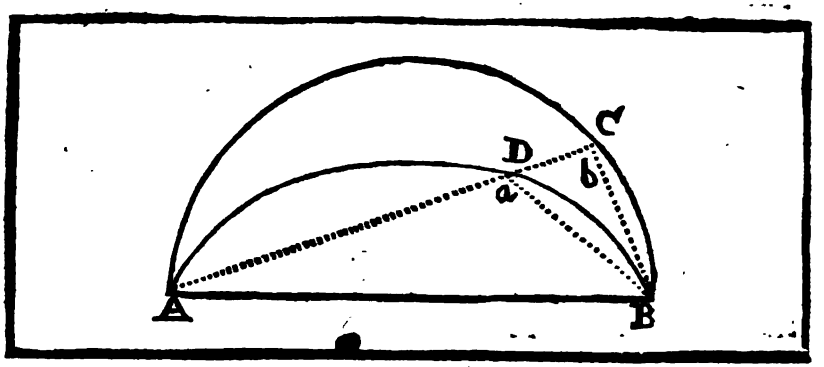
Zubereitung.

Ziehe AC, DB zuſammen.

Beweiß.

Weilen die ∠ ADB, ACB in einerley Schnitze ADCB
und auch die ∠ BDC, und CAB in einerley Schnitze BADC
ſtehen,
So iſt der ∠ c ⊓ dem ∠ f; und der ∠ d iſt ⊓, dem ∠ a. b. 21. 3.
alſo wird der gantze ∠ c + d ⊓ ſeyn denen zween ∠ f und a,
die zwey ∠ f, und a aber ſambt dem dritten ∠ h + g
ſeynd ⊓, zweyen rechten Winckeln. b. 32. 1.
Folget dann, daß auch der ∠ c + d ſambt dem ∠ h + g ⊓
ſeye, zween rechten Winckeln, u. ſ. f.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXIII. Vorgab.

Betrachtung.

Zwey gleichformige und zugleich ungleiche Schnitze (ADB ACB) kan man nicht auff einer geraden Linie (AB) und auff einerley Seiten ſtöhlen.

Beweiß.

Seye ADB der kleinere, ACB aber der gröſſere gleichförmige Schnitz.

Wenn es nun möglich iſt, ſo ſtöhle man beyde auff die gerade Linie AB, und ziehe auß A nach Gefallen die gerade Linie AC, welche den Schnitz ADB in D durchſchneide, und den Schnitz ACB in C berühre.

Hange D, B, und C, B zuſammen.

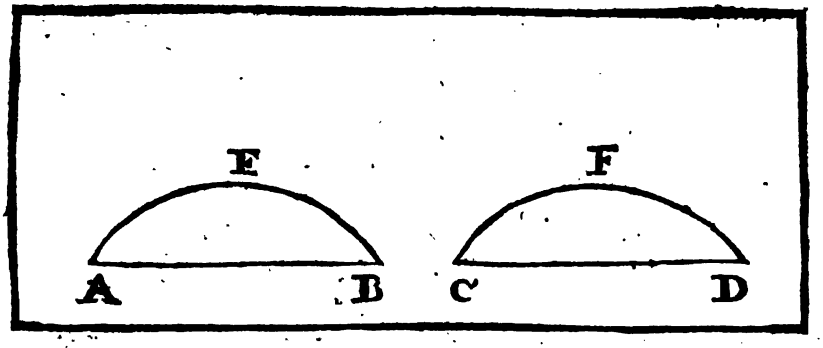
Weilen nun die zwey Schnitze einander gleichförmig ſeynd, — d. d. Vorg.

So wird der ∠ a ⊓ ſeyn müſſen dem ∠ b. — d. 10. def. 3.

Welches aber ungereimt iſt, daß der auſſere ∠ a ⊓ ſeye, dem innern ∠ b wider die — d. 32. 1.

Dahero können nicht zwey gleichförmige, und zugleich ungleiche Schnitze auff eine gerade Linie AB, und auff einerley Seiten geſtöhlt werden.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXIV. Vorgab.

Betrachtung.

Auff gleichen geraden Linien (AB, GD) ſeynd die gleichförmige Schnitze (AEB, CFD) einander gleich.

Beweiß.

Dieweilen AB ⌐ geſetzt wird, der Linie CD: d. d. Vorg.

Wenn man ſie auff einander legt, ſo werden ſie ſich durchauß auff einander ſchicken, und keine die andere übertreffen.

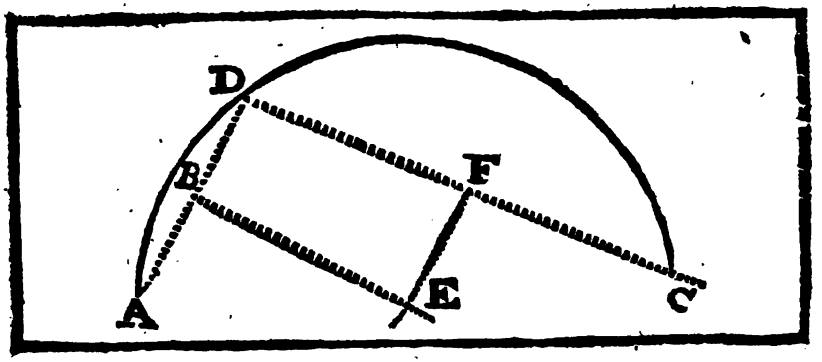
Darumb wird auch nothwendig der Schnitz AEB auff den Schnitz CFD entfallen müſſen, und durchauß einander gleich ſeyn. d. 8. ax. 1.

Sonſten, wann ſie nicht eintreffeten, müſte entweders der eine, oder der andere Schnitz hinauß, oder hinein in den erſten oder andern fallen, und dardurch ungleich einander werden;

Zwey gleichförmige, und zugleich ungleiche Schnitze aber können nicht auff einerley gerade Linien geſtellt werden.

Dahero ſie nothwendig einander gleich ſeyn müſſen.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXV. Vorgab.

Handgriff.

Einem vorgegebenen Schnitz (ADC) ſeinen gehörigen gantzen Zirckel-Kreiß zu erfüllen.

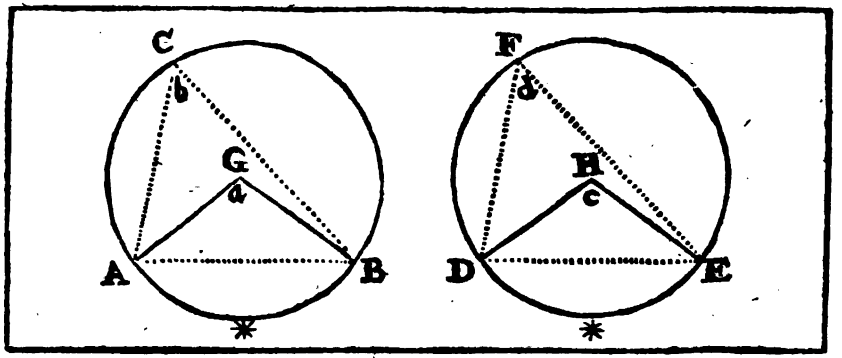
Handgriff.

Mercke in dem gegebenen Schnitz drey Puncten A, D, C.
Ziehe ſolche nach Gefallen zuſammen mit geraden Linien AD, DC.
Zertheile die Linien AD, DC in mitten B, und F. { d. 10. I.
mit denen ⊥ BE, FE, welche ſich durchſchneiden werden in dem Punct E. { d. 11. I.
Der Punct E hernach wird der Mittel-Punct ſeyn, Worauß mit der Weite EC, oder EA der übrige Zirckel-Kreiß kan erfüllet werden.

Beweiß.

Der Mittel-Punct iſt in denen zwey Linien BE, FE. d. 1. Cor. 1. 3.
Darumb wird ſolcher nothwendig in dem Durchſchnitz-Punct E ſeyn.
Dahero kan auß ſolchem Mittel-Punct E der Schnitz ADC zu einem gantzen Zirckel erfüllet werden.

Welches zu machen ware.



Die XXVI. Vorgab.

Betrachtung.

In gleichen Zirckeln (A*BC, D*EF) ſtehen die gleichen Winckeln (a und c, oder b und d) auff gleichen Umbkreiß-Stücke, oder Schnitze (A*B, D*E). die Winckeln hernach mögen ſo wohl bey denen Mittel-Puncten (G, H), oder in denen Umbkreiſſen ſtehen (gleich wie in C, F.)

Zubereitung.

Ziehe A, B, und D, E mit geraden Linien zuſammen.

Beweiß.

In dem △ AGB ſeynt die zwo Seiten GA, GB ⊓, denen zwo Seiten HD, HE in dem △ DHE, und der ∠ a iſt ⊓ dem ∠ c. — d. d. Vorg. u. 1 ſ. def. 1 — d. d. Vor.

Darumb wird auch die Baſis AB ⊓ ſeyn, der Baſis DE. — d. 4. 1.

Unterdeſſen ſeynd die ∠ b, und d geradt die Helffte deren zweyen gleichen ∠ a, und c — d. 20. 3.

Folget, daß auch der ∠ b ⊓ ſeye, dem ∠ d. — d. 7. ax. 1.

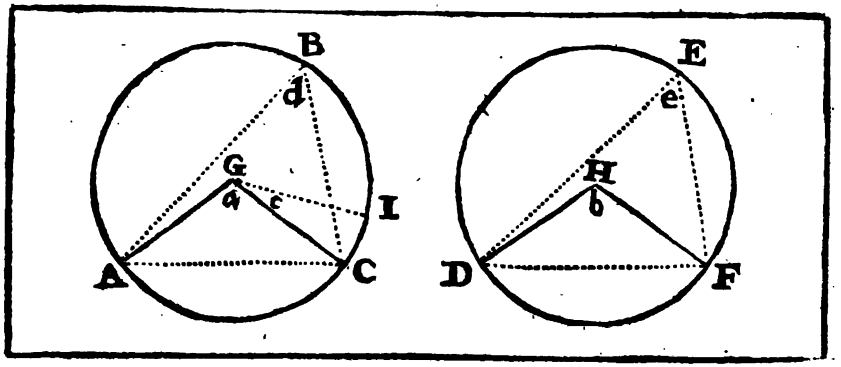
Dahero wird der Schnitz ACB gleichförmig ſeyn, dem Schnitz DEF, und wegen der gleichen Linien AB, — d. 10. def. 3.

und DE werden die Schnitze ACB, und DEF. — d. 24. 3.

auch einander gleich ſeyn.

Wann man nun von denen gleichen Zirckeln ACB, und DEF, die gleiche Schnitze ACB, und DFE darvon ziehet; So wird überbleiben das Umbkreiß-Stuck A*B ⊓ dem Umbkreiß Stücke D*E.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXVII. Vorgab.

Betrachtung.

In gleichen Zirckeln (ABC, DEF) unterspannen die gleiche Umbkreiß-Stücke (AC, DF) gleiche Winckeln, es mögen die Winckeln hernach, entweder bey denen Mittel-Puncten (G, H) oder in denen Umbkreissen (B, E) stehen.

Beweiß.

Gesetzt, man sagte, daß die Winckeln einander ungleich wären, nemlich, daß der Mittel-Puncts-∠ a ⊓ wäre, als der Mittel-Puncts-∠ b.

So mache (wann es seyn kan) den ∠ a + c ⊓, dem ∠ b, und ziehe die Linie GI.

Darauff folget, daß das Umbkreiß-Stück ACI ⊓ wäre, dem Umbkreiß-Stück DF. — d. 26. 3.

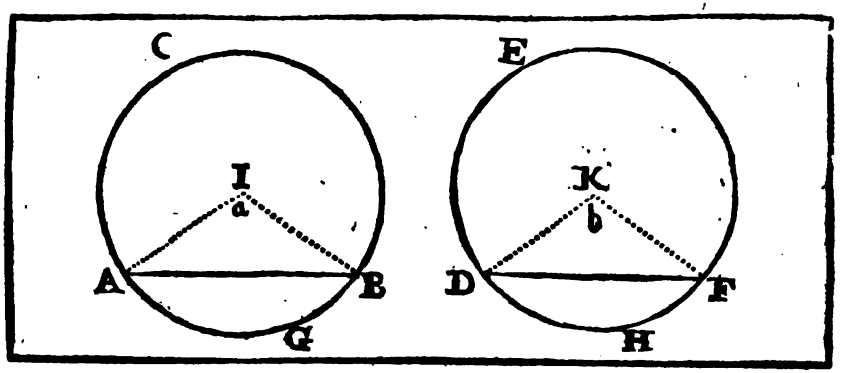
das Umbkreiß-Stück DF aber ist ⊓ dem Umbkreiß-Stücke AC gegeben worden. — d. d. Vorg.

Darumb solte auch das Umbkreiß-Stück AC ⊓ seyn, dem Umbkreiß-Stücke ACI; Ein Theil seinem gantzen, so nicht seyn kan.

Dahero ist zu sagen, daß der ∠ a auch ⊓ seye, dem ∠ b. — d. 7. ax.

Und folgends der ∠ d ⊓ dem ∠ c. — und 20. 3.

Welches zu beweisen ware.



Die XXVIII. Vorgab.

Betrachtung.

In gleichen Zirckeln (ACB, DEF) ſchneiden die gleiche gerade Linien (AB, DF) gleiche Umbkreiß-Stücke ab, alſo, daß das eine gröſſere Stück (ACB) gleich ſeye dem andern gröſſern (DEF), und das eine kleinere (AGB) dem andern kleinern (DHF).

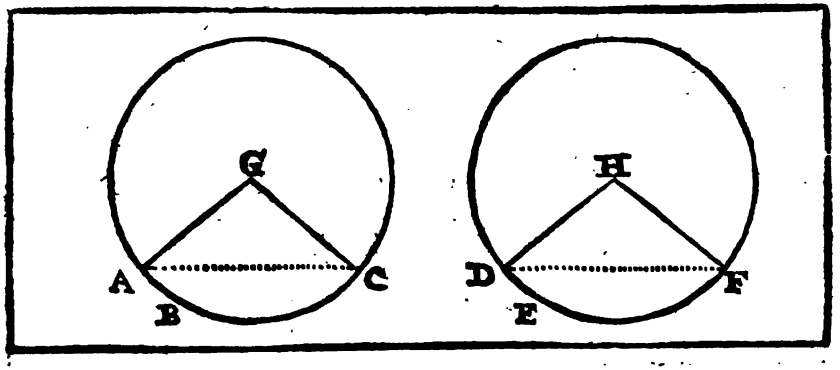
Zubereitung.

Ziehe auß denen Mittel-Puncten I. und K
die Puncte A, I; I, B; und D, K; K, F zuſammen.

Beweiß.

In dem △ AIB ſeynd die drey Seiten ⊓, denen drey Seiten deß △ DKF.	{ d. d. Werg. / { u. 15. def. 1.
Darumb wird der ∠ a ⊓ ſeyn, dem ∠ b.	d. 8. 1.
Und folgends das kleinere Umbkreiß-Stück AGB wird ⊓ ſeyn, dem kleinern Umbkreiß-Stück DHF.	d. 26. 3.
Wenn man nun dieſe gleiche Umbkreiß-Stücke von denen gleichen Zirckeln abziehet: So wird überbleiben auch das gröſſere Umbkreiß-Stück ACB ⊓, dem gröſſern Umbkreiß-Stück DEF.	d. 3. ax.

Welches zu machen ware.



Die XXIX. Vorgab.

Betrachtung.

In gleichen Zirckeln (ABC, DEF) werden von gleichen Umbkreiß-Stücken (als wie ABC, DEF) gleich gerade Linien (AC, DF) unterspannet.

Zubereitung.

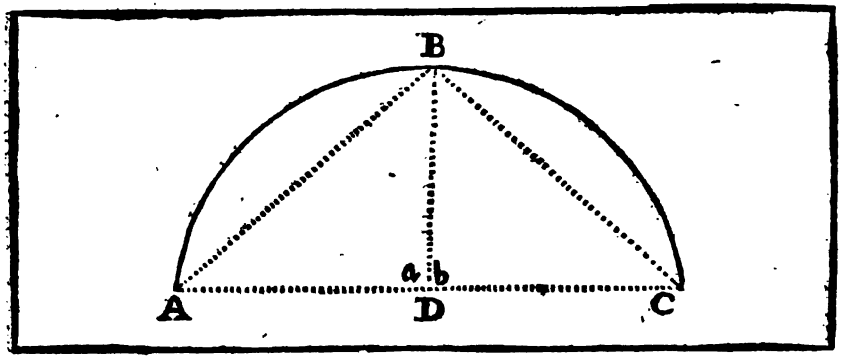
Hange auß denen Mittel-Puncten G, und H die Puncte A, G; G, C; und D, H; H, F zusammen.

Beweiß.

In dem △ AGC seynd die zwo Seiten AG, GC ⊓, denen zwo Seiten DH, HF in dem △ DHF, und der ∠ G ⊓ dem ∠ H. | d. 15. def. 1. d. 27. 3.

Dahero wird auch die Basis AC ⊓ seyn der Basis DF. | d. 4. 1.

Welches zu beweisen ware.



Die XXX. Borgab.

Handgriff.

Ein Stück (ABC) von einem gegebenen Umbkreiß in zwey gleiche Theil (in B) zu zertheilen.

Handgriff.

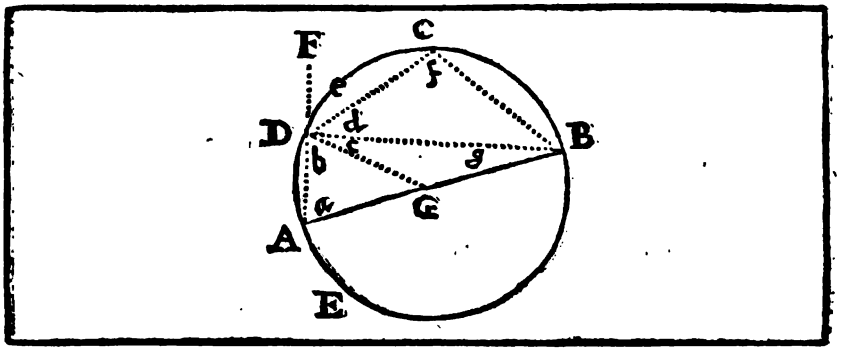
Ziehe die äuſſerſte Ende deß Stücks ABC mit einer geraden Linie AC zuſammen.
Zertheile AC in mitten D entzwey. d. 10. 1.
Auß D erhöhe die ⊥ DB biß an dem Umkreiß. d. 11. 1.
So wird der Umbkreiß ABC mitten entzwey in dem Punct B zertheilet worden ſeyn.

Zubereitung.

Hange A, B; und C, B zuſammen.

Beweiß.

In dem △ ADB ſeynd die zwo Seiten AD, und BD ⊓ denen zwo Seiten CD, und DB in △ CDB, d. 15. def. 1.
und der ∠ a ⊓ dem ∠ b. d. d. Hand.
Dahero wird auch die Baſis AB ⊓ ſeyn der Baſis BC; d. 4. 1.
Und folgends wird das Umbkreiß-Stück AB ⊓ ſeyn dem Umbkreiß-Stück CB. d. 28. 3.
Welches zu machen ware.



Die XXXI. Vorgab. Betrachtung.

In einem Zirckel (ADCBE) iſt jener Winckel (b + c), welcher in halben Umbkreiß (ADCB) ſtehet, ein Rechter.

2. Welcher aber in einem gröſſern Schnitz (DAEB), als wohl ein halber Zirckel iſt, ſtehet, derſelbe Winckel (a) iſt kleiner, als ein Rechter.

3. Der aber in einem kleinern Schnitz (DCB), als ein halber Zirckel iſt, ſtehet, ſolcher Winckel (f) iſt gröſſer, als ein Rechter.

4. Und über das iſt der Winckel (BDA), welchen man auff der geraden Linie (DB), und mit dem Umbkreiß-Stücke (DAEB) deß gröſſern Schnitz machet, gröſſer als ein rechter.

5. Der Winckel aber deß kleinern Schnitz (nemlich CDF), welchen man auff der geraden Linie (BD) und mit dem Umbkreiß-Stück (BDC) deß kleinern Schnitz machet, wird kleiner ſeyn, als ein rechter Winckel.

Zubereitung.

Auß dem Mittel-Punct G ziehe die gerade Linien GD und verlängere AD in F hinauß.
Seye AGB der Diameter des Zirckels ADCBE.

Beweiß I.

In dem △ AGD iſt der ∠ b ☐ dem ∠ a. — d. 15. def. 1.
Item in dem △ DGB iſt der ∠ c ☐ dem ∠ g. — d. 5. 1. d. 5. 1.
Darumb wird der gantze ∠ b + c ☐ ſeyn, denen ∠ a und g.
Unterdeſſen iſt auch der äuſſere ∠ e + d ☐, beyden innern ∠ a, und g ſammentlich. — d. 32. 1.
Folget, daß auch der ∠ b + c ☐ ſeye dem ∠ e + d. — d. 1. ax.
Und deßwegen ſeynd dieſe beyde ∠ b + c, und d + e Rechte. — d. 10. def. 1.

II.

Dieweilen der ∠ b + c ein rechter ∠ iſt, ſo folget,
Daß der ∠ a (ſo in dem gröſſern Schnitz, als der halbe Zirckel iſt, ſtehet) kleiner ſeye, als ein rechter. 13.Cor.1.17.1

III.

Nun in der vierſeitigen Figur ADCB iſt der ∠ a ⌐, als ein rechter. 13.d.Vor.

Die zween überſtehende ∠ aber a, und f ſolten □ ſeyn, zween rechten Winckeln. 13.22.3.

Darumb wird nothwendig der ∠ f □, als ein rechter ∠ ſeyn. 13.ſ.ax.

IV.

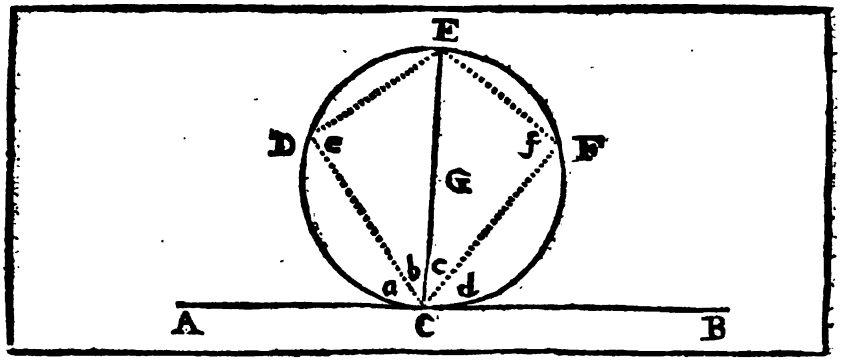
Weiters iſt klar, daß derjenige ∠, (welcher auff der geraden DB und mit dem Umbkreiß deß gröſſern Schnitz DAEB gemacht wird) gröſſer ſeye, als der rechte ∠ b + c, ſo von denen geraden BD, und AD iſt gemacht worden: die Urſach iſt begreifflich, weilen zu dieſen noch das hohle Umbkreiß-Stück DA darzu kommen iſt.

V.

Alſo iſt der eine ∠ (welcher auff der geraden BD, und mit dem Umbkreiß deß kleinern Schnitz DCB beſchloſſen wird) kleiner, als der rechte ∠ e + d, welcher von denen zwo geraden BD, DF iſt gemacht worden: die Urſach iſt ſichtbarlich, indeme der gebogene Umbkreiß den rechten ∠ e + d nicht gar außfüllet.

Folge deß erſten Theils.

In einem jeden △ iſt ein ſolcher Winckel, welcher □ iſt denen zweyen übrigen Winckeln, ein rechter Winckel.



Die XXXII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn eine gerade Linie (AB) einen Zirckel (CFG) anrühret, und von dem Anrührungs-Punct (C) eine andere gerade Linie (CE), welche den Zirckel durchschneidet (als wie in E) gezogen wird: so seynd die Winckeln, welche sothane Linie mit der anrührenden machet, gleich denen Winckeln, so auff der andern Seiten in dem Zirckel-Schnitz stehen, (das ist, der Winckel c + d ist gleich dem Winckel e, und der Winckel a + b ist gleich dem Winckel f.)

Zwey Fähle können sich hierinnen begeben.

I.

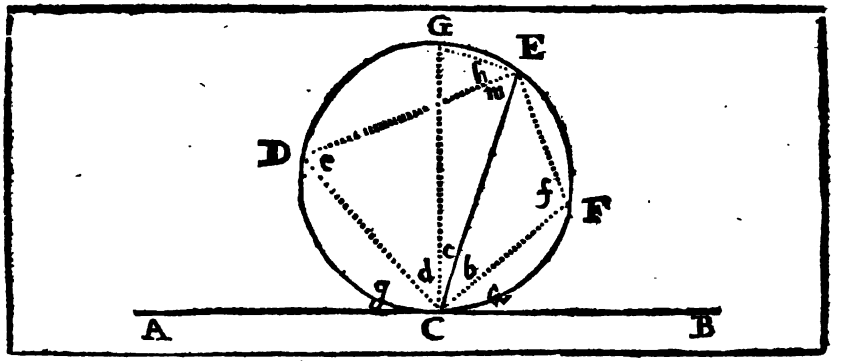
Wenn die Linie CE durch den Mittel-Punct G gehet.

Beweiß.

So ist klar, daß die ∠ e, und f, so in dem halben Umbkreiß stehen, beyde rechte seynd. 3. 31. 3.
die ∠ a + b, und c + d seynd auch beyde rechte. 3. 18. 3.
Darumb wird der ∠ e ☐ seyn dem ∠ c + d.
oder der ∠ f wird ☐ seyn dem ∠ a + b.

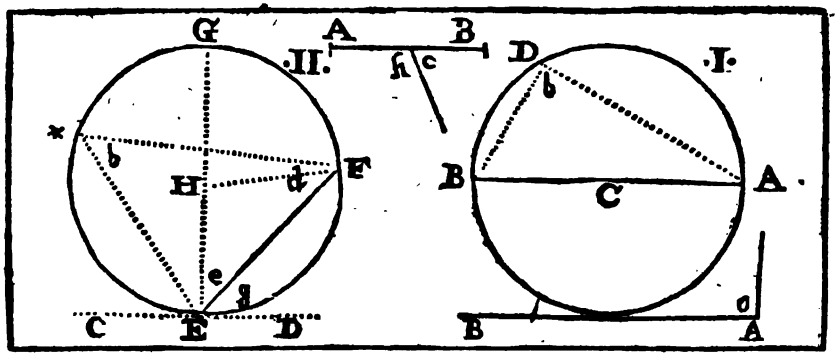
II.

Wenn aber die Linie CE nicht durch den Mittel-Punct G gehet, sondern auff eine andere Seiten hinauß, als wie in E.



Alsdann erhöhe auß C die ⊥ CGJ und hange GE zuſammen.
Mache hernachmal in denen zweyen Schnitzen CDGE, und CFE
nach Gefallen die ∠ e, und f.
Weilen in dem △ CGE der ∠ h + m ein rechter iſt, d. 31. 3.
ſo ſeynd auch die übrige zween ∠ G und c □, einem rechten. d. 32. Cor. 1.
Unterdeſſen iſt der ∠ c + b + a auch □ einem rechten. d. d. Hand.
Dahero werden die zween ∠ G + c □ ſeyn, dem ∠ c + b + a.
Wenn man nun beyderſeits den gemeinen ∠ c darvon abziehet,
So wird überbleiben der ∠ G □, dem ∠ b + a.
Der ∠ G aber iſt □ dem ∠ a (dann ſie in einerley Schnitz
CDGE ſtehen.) d. 21. 3.
Darumb wird der ∠ e □ ſeyn, dem ∠ b + a.
Ferners, weilen GEFC, als eine vierſeitige Figur,
in dem Zirckel eingeſchrieben iſt,
So werden die zween gegenüber ſtehende ∠ G, und f □,
ſeyn zween rechten ∠. d. 22. 3.
Die zween ∠ c + b + a, und d + g aber, ſeynd auch □ zween
rechten ∠. d. 13. 1.
Dahero ſeynd die ∠ G und f □, denen zween ∠ e + b + a,
und d + g.
Der ∠ G aber iſt ſchon bewieſen worden □, dem ∠ b + a. d. d. Vorg.
Wenn man beyderſeits die gleiche ∠ G, und b + a abziehet,
So wird überbleiben der ∠ f □ dem ∠ c + d + g.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXIII. Vorgab.

Handgriff.

Auff einer vorgegebenen geraden Linie (AB) ein Zirckel-Schnitz zu beſchreiben, in welchem ein Winckel, der einem andern vorgegebenen geradtliniſchen (a) gleich ſeye, ſtehen kan.

Drey Fähle hat dieſe Vorgab.

Fig. I. Handgriff.

Wenn der vorgegebene ∠ a ein rechter Winckel iſt.
So zertheile nur die gleichgenommene gerade Linie AB in Mitten C. d. 10. 1.
Schreibe hernach mit der Weite AC, oder BC einen halben Zirckel-Kreiß.
Mache darein an den halben Umbkreiß BDA nach Gefallen den ∠ b, ſo iſt es gethan.

Beweiß.

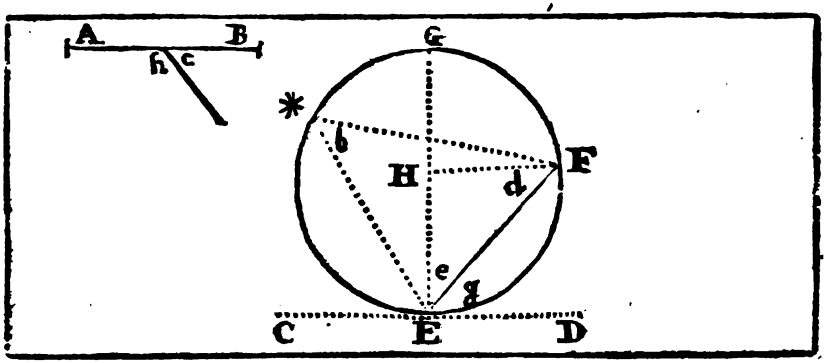
Dann weilen der ∠ b in halbem Circkel-Kreiß ſtehet. d. d. Hand
So iſt der ∠ b ein rechter, und dahero □ dem ∠ a. d. 31. 3.

Fig. II.

Wenn der vorgegebene ∠ c ein ſcharffer Winckel, und die Länge der vorgegebenen Linie AB iſt.

Handgriff.

Ziehe nach Gefähr die gerade CD. d. 23. 1.
Darauff mache den ∠ FED, oder den ∠ g □, dem ∠ c, und EF □, der AB. d. 11. 1.
Auß dem Punct E erhöhe auff der Linie CD die ⊥ EG.
Mache den ∠ d □, dem ∠ c. d. 23. 1.
So wird die gezogene FH den Diameter EG im Punct H durchſchneiden.



Schreibe auß H mit der Weite HE, oder HF einen Zirckel (dann wegen dergleichen ∠ d, und e werden die zwo Seiten EH, und FH einander □ ſeyn, und dahero gleich von dem Mittel-Punct H abſtehen, und der gezogene Kreiß, ſo wohl durch das Ende E, als durch das Ende F gehen).

Nun ſage ich, daß in dem Schnitz E * GF ein jeder nach Gefallen genommener Winckel, gleich wie der ∠ b, □ ſeye, dem vorgegebenen ∠ c.

Beweiß.

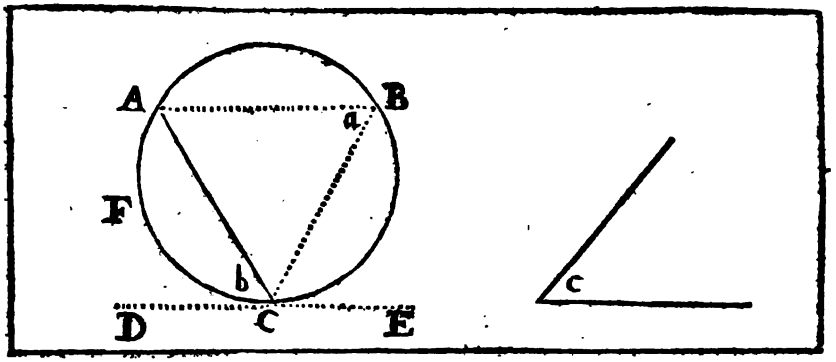
Der ∠ b iſt □ dem ∠ g. d. 32. 3.
der ∠ g iſt □ gemacht worden dem ∠ c.
Darumb wird auch der ∠ b □ ſeyn, dem ∠ c.

III.

Solte letztlich der vorgegebene Winckel ein ſtumpffer ∠ ſeyn, gleich wie der ∠ h.

So iſt eben darzu der vorgehende Handgriff, und Beweiß anzuwenden, damit der Winckel FED □, dem ∠ h möge verfertiget werden.

Welches zu machen ware.



Die XXXIV. Vorgab.

Handgriff.

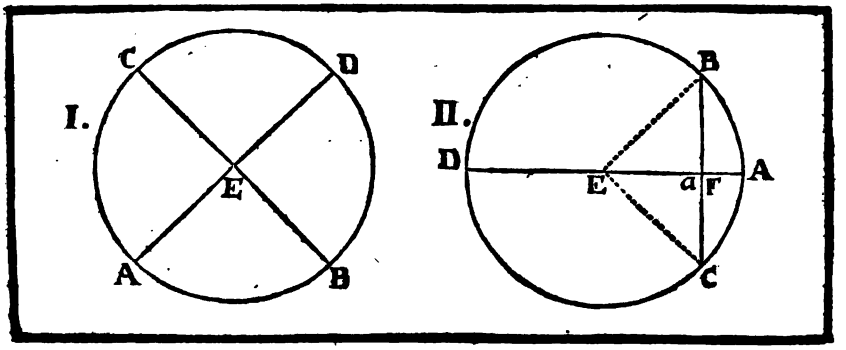
Von einem vorgegebenen Zirckel (ABCF) einen Schnitz (ABC) abzuſchneiden, in welchem Schnitz ein Winckel (gleich wie a) ſtehen kan, der einem vorgegebenen geradtliniſchen Winckel (c) gleich ſey.

Handgriff.

Ziehe die anrührende DE, p. 17. 3.
Mache auff dem Anrührungs-Puncten C den ∠ b ⊓ dem vorgegebenen ∠ c. p. 23. 1.
Die gezogene gerade AC wird alsdann den Zirckel-Schnitz ABC machen, in welchem ein Winckel nach Gefallen (gleich wie der ∠ a) ſtehen kan, ſo gleich einem andern vorgegebenen geradtliniſchen ∠ h ſeyn werde.

Beweiß.

Der ∠ a iſt ⊓, dem ∠ b. p. 32. 3.
Der ∠ b aber iſt ⊓ gemacht worden, dem ∠ c. p. d. Hand.
Darumb wird der ∠ a in dem Stück ABC auch ⊓ ſeyn, dem vorgegebenen ∠ c.
Welches zu machen ware.



Die XXXV. Vorgab. Betrachtung.

Wenn ſich in einem Zirckel (ABCD) zwo gerade Linien (AD, BC) einander durchſchneiden: ſo wird die Winckel-rechte Figur, welche von denen zween Theile (AE, ED) der einen Linie (AD) gemacht iſt, gleich ſeyn, der Winckel-Rechten Figur, welche von denen zween Theilen (CE, EB) der andern Linie (CB) begriffen wird.

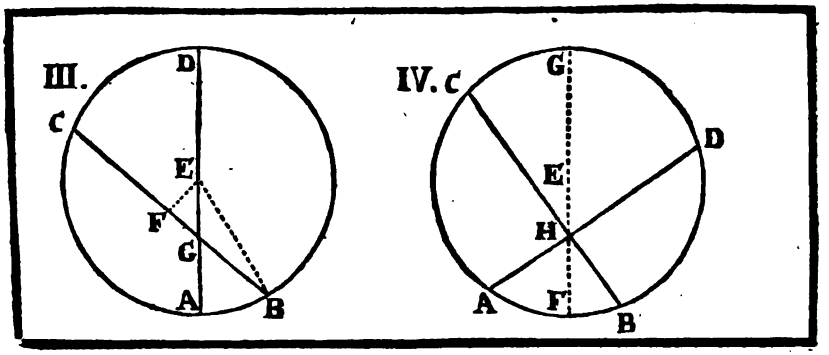
Vier unterſchiedene Fähle findet man in dieſer Vorgab.

Beweiß I. Fig. I.

Wenn ſich die zwey Linien AD, BC juſt im Mittel-Punct B einander durchſchneiden,
So iſt klar, daß die vier gerade Linien AE, ED, und CE, EB einander gleich ſeynd. d. 15. def. 1.
Dahero wird das □ auff AE ⊓ ſeyn, dem □ auff EB. d. Cor. 3. 46. 1.

Fig. II.

Wenn nur die eine, als wie AD, durch den Mittel-Punct E gehet, und die andere BC, auſſer den Mittel-Punct gleich entzwey theilet, nemlich im Punct F.
Ziehe alsdann EB, und FC zuſammen:
So iſt der ∠ a erſtlich ein rechter Winckel. d. 3. 3.
Hernach, weilen die Linie AD in zwey gleiche Theile in E, und in zwey ungleiche Theile in F zertheilet iſt:
ſo wird das ▭ DFA ſambt dem □ auff der Mitten EF ⊓ [d. 5. 2.
ſeyn, dem □ auff der halben von DA das iſt auff EA, oder EB. [d. 15. def. 1.
Das □ aber auff EB iſt ⊓ denen □ auff EF, und FB. d. 47. 1.
Wenn man beyderſeits das gemeine □ auff EF abziehet,
So wird überbleiben das ▭ DFA ⊓, dem □ auff FB,
(dann FB ⊓ iſt gegeben worden der FC).

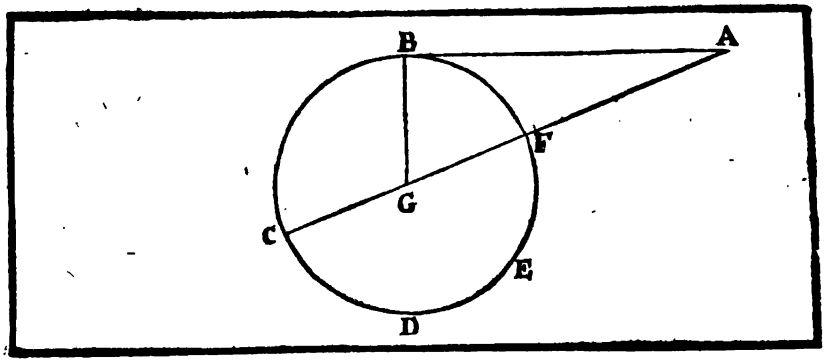


II.

Wenn aber eine, als wie AD, durch den Mittel-Punct E gehet,
und zertheilet die andere in ungleiche Theile, als wie im
Punct G.
So lasse auß dem Mittel-Punct E die ⊥ EF auff die Linie CB fahlen. d. 12. 1.
welche hierdurch gerad entzwey werde getheilet seyn. d. 3. 3.
Hange EB zusammen,
Nun ist das ▭ CGB sambt dem □ auff FG, ⌐
dem □ auff FE. d. 5. 2.
setze hinzu beyderseits das gemeine □ auff FE,
So wird das ▭ CGB sambt denen □ auff FG
und FE ⌐ seyn, denen zwey □ auff FB, und FE.
Denen zwey □ auff FB, und FE ist aber ⌐, das □ auff EB. d. 47. 1.
und denen zwey □ auff FG, und FE ist ⌐, das □ auff EG. d. dieselbe.
Darumb wird das ▭ CGB sambt dem □ auff EG ⌐
seyn, dem □ auff EB, oder auff dergleichen EA. d. 15. def. 1.
Unterdessen ist dem □ auff EA ⌐, das ▭ DGA
sambt dem □ auff EG. d. 5. 2.
Dahero wird das ▭ CGB sambt dem □ auff EG ⌐ seyn,
dem ▭ auff DGA sambt dem □ auff EG.
Nehme hinweg beyderseits das gemeine □ nuff EG
So wird überbleiben das ▭ CGB ⌐, dem ▭ DGA.

IV.

Wenn aber gar keine Linie durch den Mittel-Punct E gehet,
sondern sich beyde einander ungleich in H durchschneiden;
Alsdann ziehe durch den Durchschnitz-Punct H den Diameter FHG,
so wird das ▭ DHA ⌐ seyn, dem ▭ GHF. d. d. 3. Zahl.
Das ▭ GHF ist aber ⌐, dem ▭ CHB: eben d. d. 3. Zahl.
Darumb wird das ▭ DHA auch ⌐ seyn, dem ▭ CHB. d. ax. 1. 1.
Welches zu beweisen ware.



Die XXXVI. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn auſſerhalb eines Zirckels (BCDEF) ein gewiſſer Punct nach Gefallen (gleich wie in A) genommen wird, und von ſelben zwo gerade Linien zu dem Zirckel gezogen werden, deren eine (AC) den Zirckel durchſchneidet, die andere aber (AB) den Zirckel nur anrühret: ſo wird die Winckelrechte Figur, welche gemacht iſt von der gantzen durchſchneidenden (CFA), und dem äuſſern Theil (FA) von dem Punct auß, biß an den Umbkreiß, gleich ſeyn, dem Quadrat, welches auff der anrührenden (BA) gemacht wird.

Zwey Fähle können allhier vorkommen.

I.

Wenn die durchſchneidende CF durch den Mittel-Punct G gehet;

Alsdann ziehe GB zuſammen.

Beweiß.

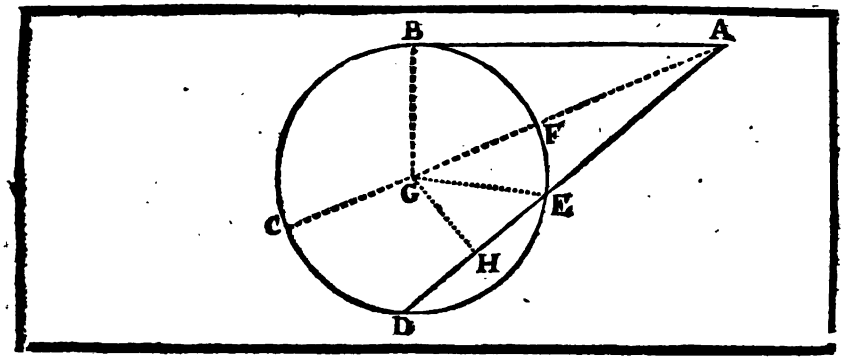
Weilen die gerade Linie CF in zwey gleiche Theile in G zerſchnitten, und ihr eine andere gerade Linie FA iſt daran geſtoſſen worden.

So wird das ▭ CAF ſambt dem □ auff FG, oder dergleichen GB ⌐ ſeyn, dem □ auff GA. [d. 15. def. 1.]

das □ auff GA aber, iſt ⌐, denen zwey □ auff GB, und BA. [d. 6. 2.]

Wenn man beyderſeits das gemeine □ auff GB abziehet, [d. 47. 1.]

So überbleibet das ▭ CAF ⌐, dem □ auff BA.



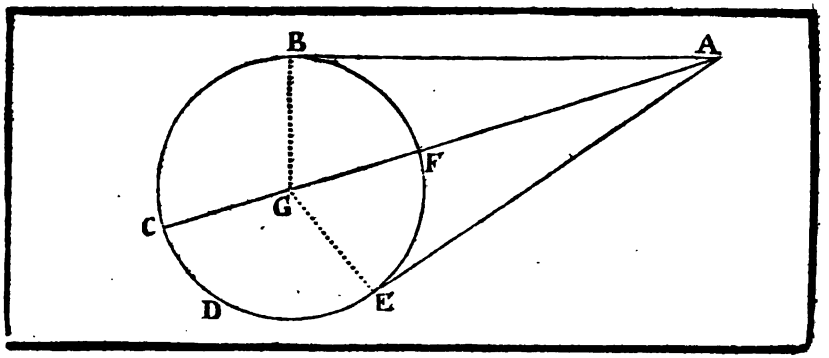
II.

Wenn die gerade DA nicht durch den Mittel-Punct G gehet,
So ziehe durch den Mittel-Punct G die gerade CA,
und hange G, E; und G, B zuſammen.

Hernach auß G laſſe herunter die ⊥ GH auff die Linie DA fallen. d. 12. 1.
durch welche die Linie DE gleich entzwey im Punct H zertheilet wird d. 3. 3.

Weilen nun das ▭ DAE ſambt dem □ auff HE ⌐
iſt, dem □ auff HA.
Wenn man beyderſeits das gemeine □ auff HG hinzu ſetzet;
So wird das ▭ DAE ſambt denen □ auff HE, und HG
⌐ ſeyn, denen zwey □ auff HA, und HG
Denen □ auff HE, und HG iſt unterdeſſen ⌐, das □ auff GE, d. 47. 1.
und denen □ auff HA, und HG iſt ⌐, das □ auff GA, d. d. ſelb.
Dahero wird das ▭ DAE ſambt dem □ auff EG ⌐
ſeyn, dem □ auff GA.
Unterdeſſen iſt das ▭ CAF ſambt dem □ auff GF,
oder (dergleichen GE) auch ⌐, dem □ auff GA. d. 6. 2.
Deßwegen wird das ▭ DAE, ſambt dem □ auff GE
⌐ ſeyn, dem ▭ auff CAF, ſambt dem □ auff GE. d. 1. ax. 1.
Ziehe darvon beyderſeits das gemeine □ auff GE,
So wird überbleiben das ▭ DAE ⌐, dem ▭ CAF.
Das ▭ CAF iſt aber ⌐, dem □ auff BA, d. d. Vor.
Folget, daß auch das ▭ DAE ⌐ ſeye, dem □ auff BA.

Welches zu beweiſen ware.



Folge.

I.

Wenn in einem Punct auſſerhalb deß Zirckels etliche durchſchneidende gezogen werden: ſo werden alle dieſe Winckelrechte Figuren, welche auff jedweder gantzen durchſchneidenden und ſeinen auſſeren Theil von dem Umbkreiß, biß an dem Punct gemacht werden, einander gleich ſeyn.

II.

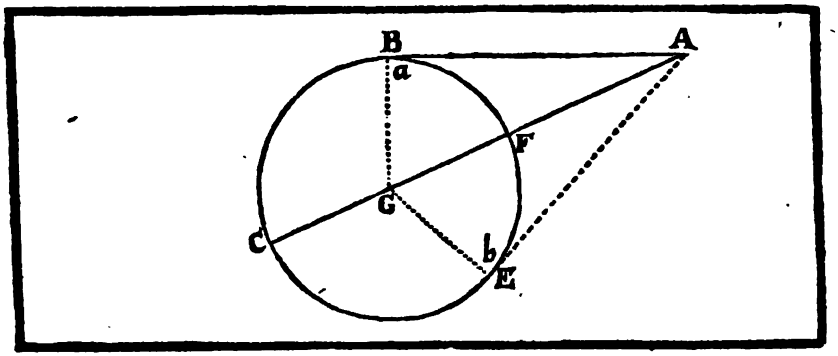
Wenn zwey anrührende Linien BA, EA: in einem Punct A gezogen werden: ſo werden ſolche Linien einander □ ſeyn, das iſt BA, wird gleich ſeyn der EA.

III.

Auß einem Puncten auſſerhalb deß Zirckels, können nicht mehr, dann zwo gerade Linien AB, AE gezogen werden, welche den Zirckel berühren.

IV.

Wenn zwey gleiche Linien auß einem Punct auſſerhalb deß Zirckels in dem gebogenen Umbkreiß gezogen werden, deren eine den Zirckel berühret, ſo wird auch die andere denſelben berühren.



Die XXXVII. Vorgab.

Betrachtung.

Wenn auſſerhalb eines Zirckels ein Punct (als wie A) genommen wird, und von ſolchem zwo gerade Linien gezogen werden, deren die eine (BA) in äuſſern Umbkreiß fahlet, die andere (AC) aber den Zirckel durchſchneidet: und ferners das Quadrat auff dieſer einfallenden (BA) gleich iſt, der Winckelrechten Figur, welche auff der gantzen durchſchneidenden (CA) und ſeinem außwendigen Theil (FA) gemacht wird: ſo wird die einfallende Linie (AB) den Zirckel berühren.

Zubereitung.

Auß A ziehe die anrührende Linie AE. d. 17. 3.
Hange G, E; und G, B zuſammen.

Beweiß.

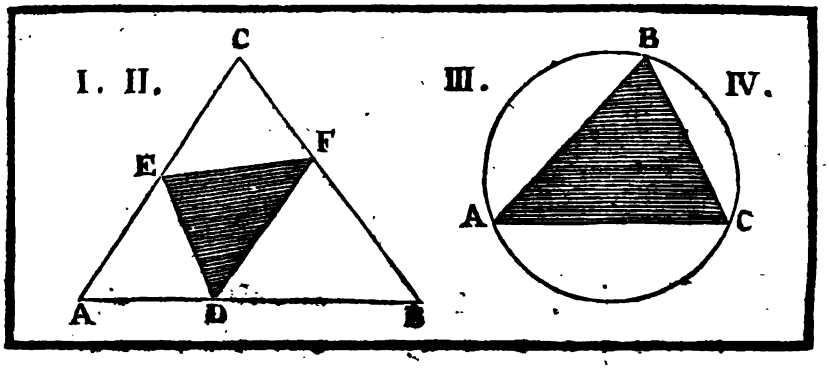
Das □ auff AE iſt ⊓, dem ▭ CAF. d. 36. 3.
dem ▭ CAF aber iſt ⊓, das □ auff BA. d. d. Vorg.
Dahero wird das □ auff AE ⊓ ſeyn, dem □ auff BA, d. 1. ax. 1.
und folgends die Seiten AE ⊓ ſeyn, der Seiten BA. d. 4. an. 46. 1.
Die Seiten GB iſt auch ⊓, der Seiten GE, d. 15. def. 1.
und die Baſis GA iſt beyden △ gemein.
Darumb wird der △ GBA ⊓ ſeyn, dem △ GEA. d. 8. 1.
Ferner iſt der ∠ b ein rechter Winckel } d. 18. 3.
Folget, daß auch der ∠ a ein rechter Winckel ſeye, } und Zuß.
Deßwegen wird die Linie AB den Zirckel anrühren. d. Cor. 16. 3.
Welches zu beweiſen ware.

Das

Vierte Buch

Deß Teutsch-redenden

Euclides.



Wort = Erklärungen.

I.

Man ſagt, daß eine geradtliniſche Figur in einer andern geradtliniſchen Figur ſeye recht eingeſchrieben, wenn jede Winckel der innern, jede Seiten der äuſſern Figur berühret.

Alſo iſt in dem △ ACB der △ EFD recht eingeſchrieben; Dann die drey ∠ D, E, F, die drey Seiten AB, AC, CB Deß △ ACB berühren. Fig. I.

II.

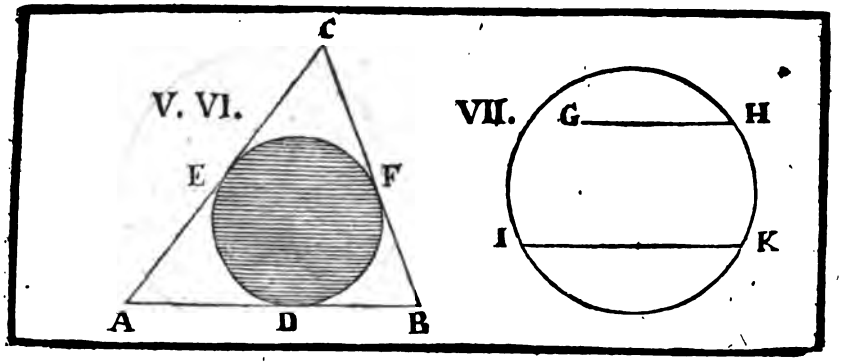
Gleicherweiſe ſagt man, daß eine geradtliniſche Figur umb eine andere geradtliniſche Figur ſeye recht beſchrieben, wenn jede Seiten der äuſſern jede Winckel der innern Figur berühret: als wie der Triangel ABC iſt recht umbſchrieben umb den Triangel DEF. Fig. II.

III.

Eine geradtliniſche Figur aber wird recht in einem Zirckel eingeſchrieben, wenn alle Winckeln ſolcher Figur den inwendigen Umkreiß deß Zirckels anrühren. Fig. III.

IV.

Herentgegen iſt eine geradtliniſche Figur recht umb einen Zirckel beſchrieben, wenn alle Seiten ſolcher Figur deß Zirckels äuſſerlichen Umbkreiß anrühren. Fig. IV.



V.

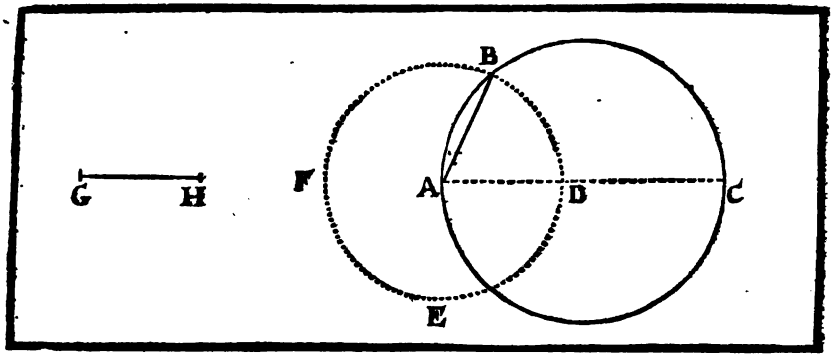
Man saget auch, daß ein Zirckel in eine geradtlinische Figur recht eingeschrieben seye, wenn er mit seinem Umbkreiß alle Seiten solcher Figur anrühret, als wie DEF.

VI.

Ein Zirckel aber ist umb eine geradtlinische Figur recht beschrieben, wenn er mit dem innern Umbkreiß alle Winckeln solcher Figur anrühret. Fig. VI.

VII.

Eine gerade Linie im Zirckel gestölter, ist genant, wenn derselben beyde Ende den innern Umbkreiß deß Zirckels anrühren;
Also ist die Linie IK, in dem Zirckel gestellt, nicht aber die Linie GH.



Die I. Vorgab.

Handgriff.

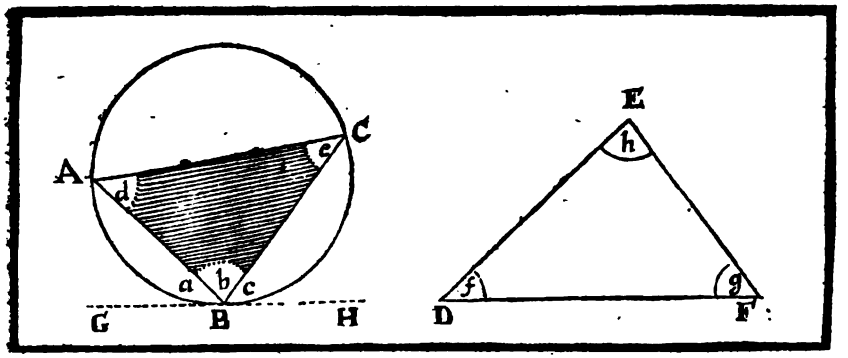
In einem vorgegebenen Zirckel (ABC) eine gerade Linie (AB) zu ſtellen, welche gleich ſeye, einer andern vorgegebenen geraden Linie (GH); dieſe aber muß nicht gröſſer ſeyn, als deß vorgegebenen Zirckels Diameter (AC).

Handgriff.

Ziehe in dem Zirckel den Diameter ADC:
Und wenn die gegebene Linie GH □ wäre, dem Diameter, ſo würde dieſe Vorgab ſchon verfertiget ſeyn,
Seye aber GH kleiner, als der Diameter ADC.
Mache dahero das Stück AD □, der Linie GH: 3. 1.
Auß A mit der Weite AD ſchreibe den Zirckel DEF, welcher den erſten in dem Punct B durchſchneide.
Ziehe AB zuſammen;
So wird die Linie AB □, der Linie GH in dem Zirckel ABC geſtellt ſeyn.

Beweiß.

Die Linie AB iſt □, der Linie AD. 15. def. 1.
AD iſt aber □ gemacht worden, der Linie GH. 1. d. Hand.
Darumb wird die Linie AB auch □ ſeyn, der Linie GH.
Unterdeſſen berühren beyde Ende A, und B den innern Umbkreiß deß Zirckels ABC ſichtbarlich.
Dahero iſt die AB, oder GH in dem Zirckel ADC geſtellt worden. 7. def. 4.
Welches zu machen ware.



Die 11. Vorgab.

Handgriff.

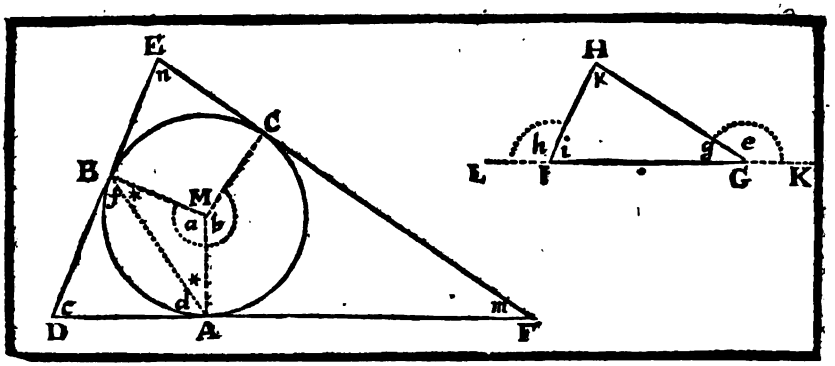
In einem vorgegebenen Zirckel (ABC) einen Triangel (ABC) einzuſchreiben, deſſen drey Winckeln inſonderheit gleich ſeynd, dreyen andern Winckeln, eines andern vorgegebenen Triangels (DEF).

Handgriff.

Ziehe nach Gefallen die anrührende GH, welche den Zirckel ACB im Punct B berühre. d. 17. 3.
Mache den ∠ a □, dem ∠ f, und ziehe BA in dem Umbkreiß. d. 23. 1.
Mache auch den ∠ c □, dem ∠ g, und ziehe BC in dem Umbkreiß.
Hange letzlich A, C zuſammen, ſo iſt es verfertiget.

Beweiß.

Der ∠ e iſt □, dem ∠ a. d. 32. 3.
Der ∠ a aber iſt □ gemacht worden, dem ∠ f. d. d. Hand.
Dahero wird der ∠ c auch □ ſeyn, dem ∠ f.
Auff ſolche Weiſe iſt auch der ∠ d □, dem ∠ g.
Und folgends wird der dritte ∠ b □ ſeyn, dem ∠ h. d. 1. Cor. 32. 1.
Alſo ſeynd in dem △ ABC die drey Winckel inſonderheit □, denen drey Winckeln inſonderheit deß △ DEF:
Der △ ABC iſt auch in dem Zirckel eingeſchrieben. d. 3. def. 4.
(dann alle drey Winckeln den Zirckel inwendig ſichtbarlich berühren).
Welches zu machen ware.

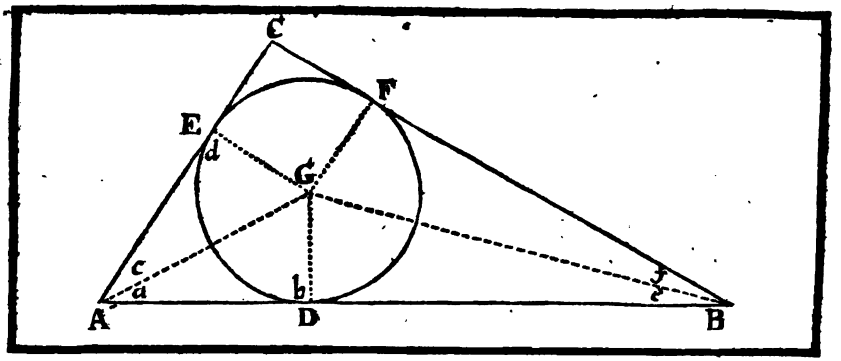


Die III. Vorgab. Handgriff.

Umb einen vorgegebenen Zirckel (ABC) einen Triangel (DEF) zu schreiben, deſſen drey Winckel inſonderheit gleich ſeynd, andern dreyen Winckeln inſonderheit, eines andern vorgegebenen Triangels (GIH).

Handgriff.

Verlängere die Seiten GI zu beyden Seiten in L, und K nach Gebühr,
Hernach ziehe auß dem Mittel-Punct M deß Zirckels ABC die gerade Linie MB nach Gefähr.
Mache den ∠ a □, dem ∠ h, und den ∠ b □ dem ∠ c. 6. 23. 1.
Ziehe ferners am Ende deren drey Linien MB, MA, MC die anrührende Linien DE, DF, FE, welche ſich letzlich werden zuſammen ſtoſſen, und den △ DEF geſtalten. Deſſen drey Winckel a inſonderheit □ ſeynd, denen drey Winckeln inſonderheit deß △ GHI.
Zubereitung. Ziehe B und A zuſammen.
Beweiß. Jetzund ſtehet zu beweiſen, daß die drey Linien ſich endlich zuſammen ſtoſſen, und einen △ geſtalten müſſen.
Dann die überzwergs gezogene Linie AB die zwey ∠ f und d ⅂ macht, als zwey rechte ∠.
(maſſen der ∠ f + *, und d + * 2 rechte ſeynd gemacht worden.) 6. d. Hand.
Dahero werden die zwey anrührende Seiten ED und DF gegen D nothwendig zuſammen kommen. 6. 11. ax.
Eben dieſes iſt von denen zwey andern Seiten zu ſagen.
Alſo werden ſie endlich den △ DEF geſtalten müſſen, 6. d Hand.
Welcher umb den Zirckel ABC recht umbſchrieben iſt. und 4. def. 1.
Weiters, indeme in der vierſeitigen Figur BMAD die zween ∠ f + *, und d + * zween rechte Winckeln ſeynd. 6. 18. 3.
So werden auch die übrige zween ∠ a und c □ ſeyn zween rechten ∠, 6 1. anm. 32. 1
Unterdeſſen ſeynd auch die zween ∠ h und i □ zween rechten Winckeln. 6. 13. 1.
Dahero werden die 2 ∠ a und c ſammentlich □ ſeyn, denen 2 ∠ h u. i ſammentlich.
Wenn man aber beyderſeits die gleiche ∠ a und b darvon ziehet,
So wird überbleiben der ∠ c □, dem ∠ g.
Auff dieſe Bewiß-Art wird auch der ∠ m □ ſeyn, dem ∠ g.
Und letzlich der ∠ n □, dem ∠ k. Welches zu machen ware. 6. 1. Cor. 32. 1.



Die IV. Vorgab.

Handgriff.

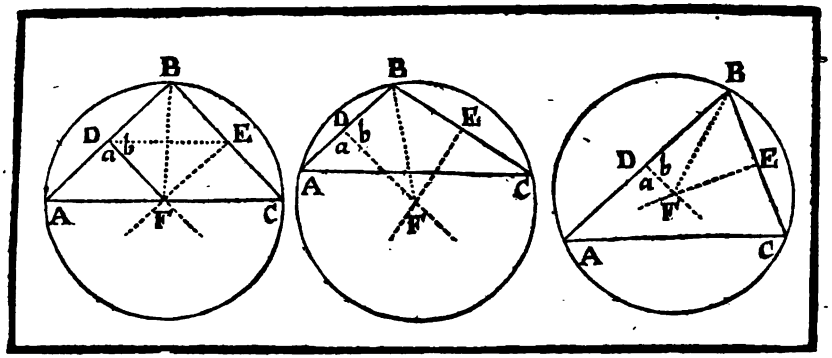
In einem vorgegebenen Triangel (ABC) einen Zirckel (DEF) zu ſchreiben.

Handgriff.

Zertheile gerad̃t entzwey die zween ∠ c + a, und f + e. d. 9. 1.
mit denen geraden Linien AG, und BG, welche ſich nothwendig in einen Punct, gleich wie in G, werden zuſammen ſtoſſen, d. 11. ax. 2.
Auß dem Punct G ziehe die drey Linien GE, GD, GF, welche auff denen dreyen Seiten AC, AB, BC ⊥ ſtehen, d. 12. 1.
Alsdann ſchreibe auß dem Punct G mit der Weite GD, den Zirckel DEF, welcher auch durch die zween Puncten E, und F gehen, und die drey Seiten deß △ ABC anrühren werde. Und dahero iſt der Zirckel DEF eingeſchrieben. d. 5. def. 4.

Beweiß.

In dem △ GDA ſeynd die zwey ∠ b, und a ⊓, denen zwey ∠ d, und c in dem △ GEA: und die Seiten AG iſt beyden △ gemein. d. d. Hand.
Darumb wird auch die Seiten GD ⊓ ſeyn, der Seiten GE: d. 26. 1.
Eben auff ſolche Art wird bewieſen, daß FG ⊓ ſeye, GE, und deßwegen ſeynd alle drey Linien EG, DG, und FG einander gleich. d. 1. ax. 1.
Unterdeſſen hat man mit der Weite GD einen Zirckel geſchrieben, welcher die Seiten AB berühret hat.
Folget, daß auch nothwendig durch die andere zwey äuſſerſte Puncten E, und F der Zirckel gehen, und dahero die andere zwey Seiten anrühren muß.
Welches zu machen ware.



Die V. Vorgab.

Handgriff.

Umb einen jeden vorgegebenen Triangel (ABC) einen Zirckel zu schreiben.

Handgriff.

Zertheile nach Gefallen zwey Seiten, als wie AB, BC in mitten entzwey in denen Puncten D, E: d. 10. I.

Auß denen Puncten D, und E ziehe die zwo gerade Linien, DF, und EF, welche auff denen Seiten AB, BC ⊥ stehen; Diese zwo ⊥ hernach, werden nothwendig in einem Punct, gleich wie F, zusammen kommen müssen, welches im Anfang der dritten Vorgab dieses Buchs schon genugsam ist bewiesen worden. d. 11. ax. I.

Letztlich auß dem Punct F mit der Weite FA schreibe einen Zirckel ABC, welcher mit seinem Umbkreiß auch die andere zween Winckeln anrühren werde. Und dahero ist umb den △ ein Zirckel beschrieben worden. d. 6. def. 4.

Ziehe vorhero F, B zusammen.

Beweiß.

In dem △ BFD ist die Seiten BD ⊓, der Seiten DA im △ AFD. d. d. Hand.

Und die Seiten DF ist beyden △ gemein.

Und der ∠ b ⊓, dem ∠ a. d. d. Hand.

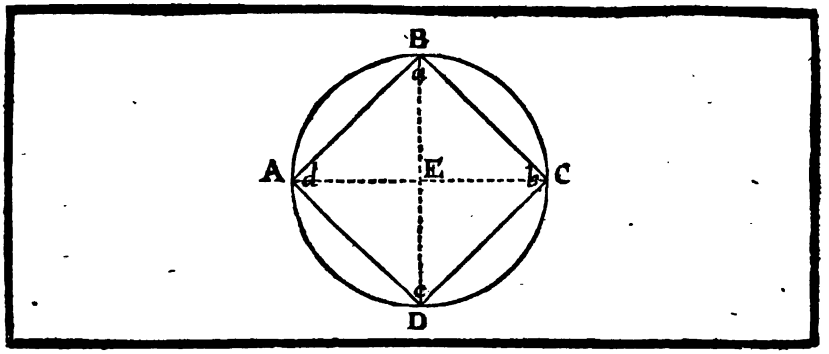
Folget, daß auch die Seiten BF ⊓ seye, der Seiten AF: d. 4. I.

Nach dergleichen Beweiß-Art, wird auch FC ⊓ seyn der FB:

Dahero seynd alle drey Linien FA, FB, FC einander gleich, d. I. ax. I.

Und deßwegen gehet der Zirckel, welcher auß dem Punct F mit der Weite AF beschrieben wird, auch durch die andere zween Puncten BC, und also berühret er alle drey ∠ deß △ ABC.

Welches zu machen ware.



Die VI. Vorgab.

Handgriff.

In einem vorgegebenen Zirckel (ABCD) ein Quadrat einzuſchreiben.

Handgriff.

Ziehe die zwey Diameter AC, BD, welche ſich im Mittel-Punct E, ⊥ durchſchneiden. — d. 11. 2.

Hange alsdann AB, CD zuſammen,

So iſt das □ ABCD in dem vorgegebenen Zirckel verfertiget.

Beweiß.

Dieweilen die vier ∠ umb E rechte ſeynd, — d. d. Hand.

und die Linien EA, EB, EC, ED einander gleich: — d. 15. def. 1

Folget, daß auch die Linien AB, BC, CD, AD einander werden gleich ſeyn, — d. 4. 1.

Dahero iſt die Figur gleichſeitig.

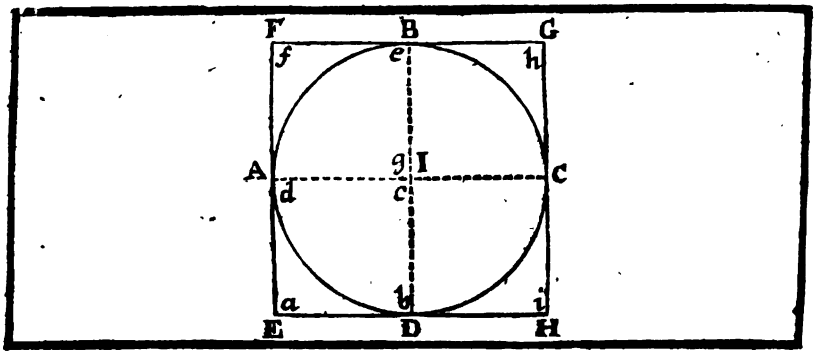
Nun ſtehen die vier ∠ a, d, b, c in einem halben Umbkreiß.

Deßwegen werden ſie vier rechte ∠ — d. 31. 3.

und die Figur ABCD ein wahrhafftes □ ſeyn, — d. 29. def. 1.

ſo in dem Zirckel iſt eingeſchrieben worden.

Welches zu machen ware.



Die VII. Vorgab.

Handgriff.

Umb einen vorgegebenen Zirckel (ABCD) ein Quadrat zu schreiben.

Handgriff.

Ziehe die zwey Diameter AC, BD, welche sich in dem Mittel-Punct I, ⊥ durchschneiden; d. 11. 1.

Ziehe hernach, durch die vier äusserste Puncte A, B, C, D Die vier anrührende Linien EF, FG, GH, HE, welche sich nothwendig (wie es in der dritten Vorgab dieses Buchs schon bewiesen worden) in denen vier Puncten E, F, G, H werden zusammen stossen, und daß □ machen. d. 17. 3. d. 11. ax. 1.

Beweiß.

Wegen deren zwey rechten ∠ b, und c, wird EH = seyn der AC. d. 28. 1.

Auch wegen deren rechten ∠ e, und g wird FG = seyn der AC. d. 28. 1.

Und also EH =, der FG. d. 30. 1.

Auff solche Weise, weilen auch so wohl EF, als HG = ist der DB, so wird eben EF = seyn, der HG.

Dahero ist EFGH ein □, und zwar ein gleichseitiges. d. 35. def. 1.

Dann alle vier Seiten EF, FG, GH, und HE seynd ⊥, dem Diameter. d. d. Vorg, und 34. 1.

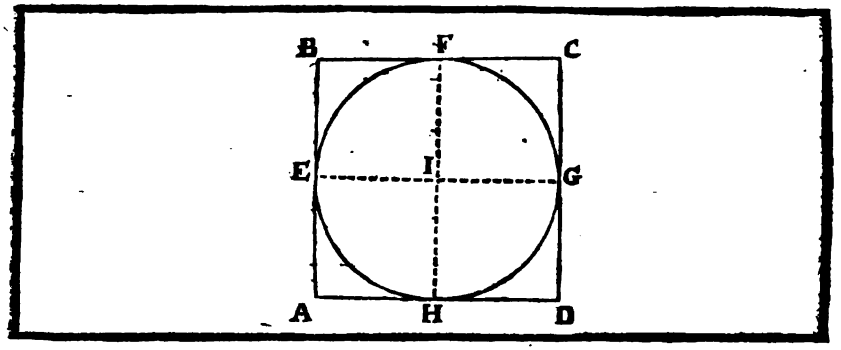
Letztlich, weilen in der vierseitigen Figur AIDE die drey ∠ d, c, und b drey rechte seynd gemacht worden.

So wird der vierdte ∠ a auch ein rechter seyn. d. 1. ax. 32. 1.

und folgends die übrige drey ∠ f, b, i in □ EFGH drey rechte seyn. d. 2. ax. 46. 1.

Dahero man schliesset, daß EFGH ein □ seye, und daß die vier Seiten (so umb den Zirckel ABCD beschrieben worden) denselben berühren.

Welches zu machen ware.



Die VIII. Vorgab.

Handgriff.

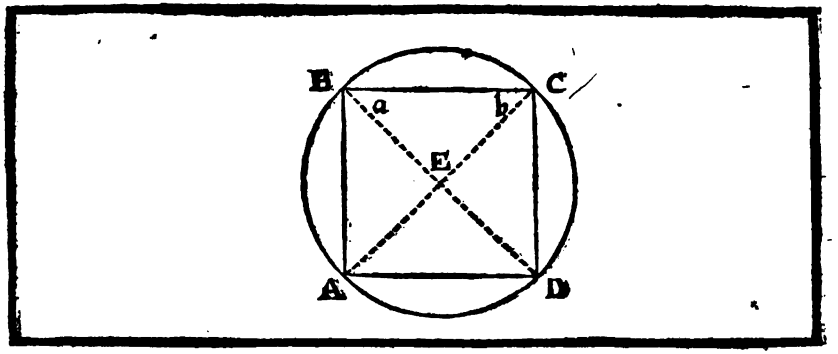
In ein vorgegebenes Quadrat (ABCD) einen Zirckel zu ſchreiben.

Handgriff.

Zertheile die vier Seiten AB, BC, CD, DA
in zwey gleiche Theile in denen Puncten E, F, G, H. d. 10. 1.
Hange EG, und FH zuſammen, welche ſich durchſchneiden
werden in dem Punct I.
Auß I, als dem Mittel-Punct, ſchreibe mit der Weite IE
einen Zirckel, welcher auch die andere drey
Puncten F, G, H anrühren werde: und dahero der Zirckel
in das □ eingeſchrieben iſt. d. 5. def. 4.

Beweiß.

Die Linie BC iſt ⊓ und ═ der Linie EG. d. 33. 1.
Dahero auch die Helffte BF ⊓, und ═ iſt, der Helffte EI.
Es iſt auch die Linie AB ⊓ I, und ═, der Linie HF. d. 33. 1.
Dahero auch die Helffte BE ⊓, und ═ iſt, der Helffte FI,
Deßwegen iſt BFIE ein ▭. d. 35. def. 1.
Unterdeſſen iſt EB ⊓, der BF, d. d. Hand.
So folget, daß auch die überſtehende Seiten FI ⊓ ſeye der EI. d. 34. 1.
Auff ſolche Weiſe wird auch GI ⊓ ſeyn, der FI: und letzlich HI ⊓,
der IG.
Und dahero alle vier Linien EI, IF, IG, IH einander gleich: d. 1. ax. 1.
Worauß man ſchlieſſet, daß der Puncten I der Mittel-Punct ſeye, d. 9. 3.
und wenn man auß demſelben Punct mit der Weite IE
einen Zirckel ſchreibet, ſolcher auch die andere drey Seiten des
□ ABCD in denen Puncten F, G und H berühren werde. d. 1. Cor. 16. 3.
Welches zu machen ware.



Die IX. Vorgab.

Handgriff.

Umb ein vorgegebenes Quadrat (ABCD) einen Zirckel zu schreiben.

Handgriff.

Ziehe die zwey Diameter AC, BD, welche sich in dem Punct E durchschneiden werden.

Auß E, als dem Mittel-Punct, schreibe mit der Weite EA einen Zirckel, dieser wird auch die drey übrige Puncten B, C, D anrühren. Und dahero wird der Zirckel umb das □ geschrieben worden seyn.

Beweiß.

Dieweilen der ∠ a, und b zwey halb rechte Winckel seynd, so wird die Linie EB ⊓ seyn, der Linie EC. d. 34. I. d. 6. I.

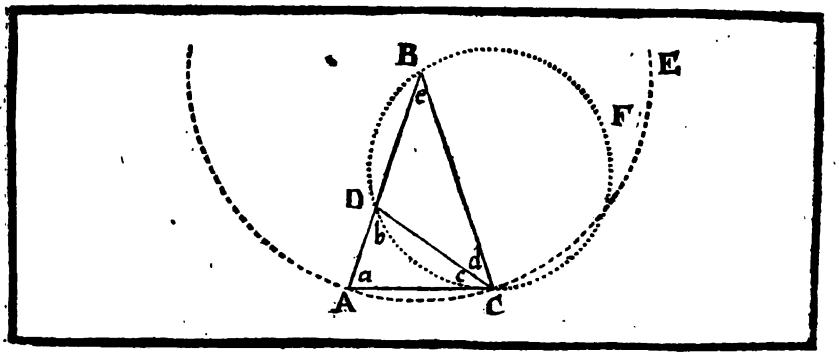
Und auff solche Weise wird auch ED ⊓ seyn der EC, und EA ⊓ der EB, das ist alle vier Linien EB, EC, ED, EA werden einander ⊓ seyn. d. 1. ax. E.

Derohalben wird der Zirckel, so mit der Weite EA auß dem Punct E geschrieben worden ist, auch die übrige drey Puncten B, C, D anrühren.

Welches zu machen ware.

Anmerckung.

Wann umb den gegebenen Zirckel ein □ geschrieben, und in denselben Zirckel ein □ eingeschrieben wird: so wird das umbschriebene □ doppelt des eingeschriebenen □ seyn. Die Ursach ist, weilen die Seite deß umbschriebenen □ ⊓ ist, dem Diameter deß Zirckels, oder deß eingeschriebenen □ (wie es in der 7 dieses bewiesen ist), das □ aber auff den Diameter ist doppelt deß jenen □, dessen er Diameter ist. d. 47. I.



Die X. Vorgab.

Handgriff.

Einen zwey gleichſeitigen Triangel (ABC) zu machen, deſſen jeder Winckel inſonderheit (a, oder c + d), bey der Baſis (AC), zweymahlen ſo groß ſeye, als der übrige dritte Winckel (e) bey dem Spitz (B).

Handgriff.

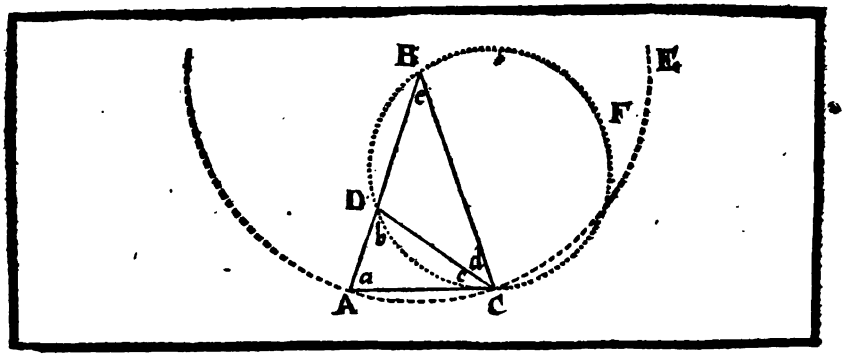
Schreibe nach Gefähr die gerade Linie AB.
Zertheile ſie in dem Punct D alſo; daß das ▭ auff BA, und DA ⊓ ſeye, dem □ auff BD. d. II. 2.
Hernach auß B, als auß dem Mittel-Punct, ſchreibe mit der Weite BA einen Zirckel ACE.
Stelle darein die Linie AC ⊓, dem Stück DB. d. I. 4.
Hange B, C zuſammen: ſo iſt ein ſolcher △ ABC verfertiget.
Dann der Winckel a, oder c + d bey der Baſis AC iſt ein jeder inſonderheit zweymahl ſo groß, als der dritte ∠ e bey der Spitze B.

Zubereitung.

Ziehe zuſammen D, C, und ſchreibe umb den △ BDC den Zirckel CDBF. d. 5. 4.

Beweiß.

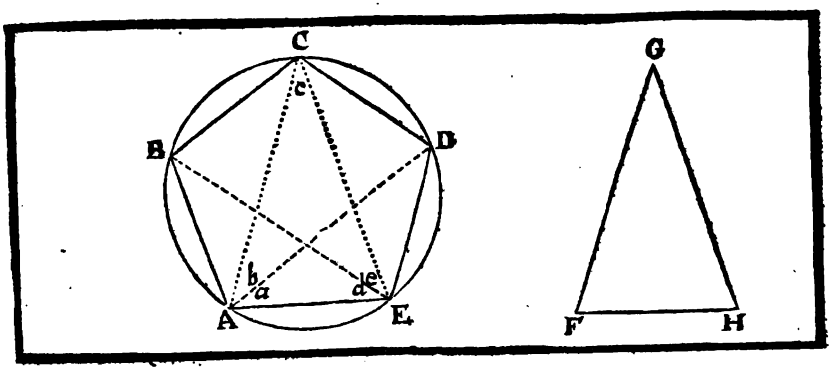
Weilen das ▭ BAD ⊓ iſt, dem □ auff DB, oder AC, d. d. Hand.
(dann AC iſt ⊓ gemacht worden der DB)
Und die Linie AB den Zirckel CDBF durchſchneidet.
So wird nothwendig die Linie AC ſolchen Zirckel im Punct C anrühren müſſen. d. 37. 3.
Und deßwegen iſt der ∠ c ⊓, dem ∠ e, d. 32. 3.
Setze unterdeſſen beyderſeits hinzu den gemeinen ∠ d, ſo wird der ∠ c + d ⊓ ſeyn, dem ∠ e + d.



Nun ist aber, der äussere ∠ b ⊓, beyden innern ∠ e und d. — d. 32. 1.
Also wird auch der ∠ b ⊓ seyn, dem ∠ c + d.
Unterdessen ist die Linie AB ⊓, der Linie BC. — d. 15. def. 1.
und folgends der ∠ a ⊓, dem ∠ c + d, (oder — d. 5. 1.
dem gleichen ∠ b. — d. d. Vor.
Dahero wird auch die Linie DC ⊓ seyn, der Linie AC. — d. 6. 1.
Die Linie AC aber ist ⊓ gemacht worden, der Linie DB. — d. d. Hand.
Darumb wird auch die Linie DB ⊓ seyn, der Linie DC.
und folgends der ∠ e ⊓ dem ∠ d. — d. 5. 1.
Auß dem Vorgehenden aber ist schon bewiesen worden, daß der ∠ b ⊓ seye denen beyden ∠ e nnd d.
Dahero schliesset man, daß der ∠ b zweymahlen so groß seye, als der ∠ e, bey der Spitze B.
Der ∠ b aber, ist auch ⊓ bewiesen worden, dem ∠ a oder dem gleichen ∠ c + d.) — d. d. Vor.
Folget dann letztlich, daß auch der ∠ a, oder c + d, nemlich ein jeder insonderheit, zweymahln so groß seye, als der ∠ e, bey der Spitze B.
Welches zu machen ware.

Folge.

Wenn ein △ auff solche Art gestaltet ist, daß die zwey Winckeln bey der Basis, ein jeder insonderheit zweymahln so groß ist, als der Winckel bey der Spitze: so wird ein solcher Winckel bey der Spitze $\frac{1}{5}$ von 2 rechten (oder $\frac{5}{5}$ seyn, das ist, wann ein jeder Winckel bey der Basis 72 Grad haltet, so wird der Winckel bey dem Spitze 36 Grad haben.



Die XI. Vorgab.

Handgriff.

In einem vorgegebenen Zirckel (ABCDE) eine fünff-gleichseitige, und fünff-gleicheckichte Figur zu schreiben.

Handgriff.

Mache nach Gefallen einen zwey-gleichseitigen △ FGH: dessen zwey ∠ bey der Basis, jeder insonderheit zweymahlen so groß seye, als der ∠ bey dem Spitz. — d. 10. 4.

Einschreibe einen solchen △ in den Zirckel ABCDE: gleich wie allhier der △ ACE ist. — d. 2. 4.

Zertheile die ∠ a + b, und d + e, gerandt entzwey mit denen gezogenen geraden Linien AD, EB an dem Umbkreiß hinein. — d. 9. 1.

Hange letztlich die Puncten A, B, C, D, E zusammen, so ist es gemacht.

Beweiß.

Weilen die 5 ∠ a, b, c, d, e einander seyn, □ gemacht worden: — d. d. Hand.

So werden sie auff gleichen Umbkreiß-Stücken ED, CD, EA, AB, BC stehen. — d. 26. 3.

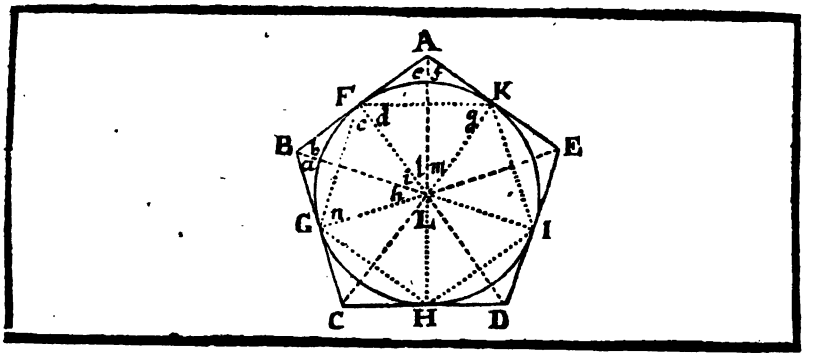
Dahero werden die Linien ED, CD, EA, BC auch einander □, und die Figur fünff-gleichseitig seyn. — d. 29. 3.

Ferners indeme das Umbkreiß Stück BC □ ist, dem Umbkreißstück DE, (wenn man beyderseits hinzu setzet das gemeine Stück EAB) — d. d. Vor.

So wird das Umbkreiß-Stück CBAE □ seyn, dem Stück DEAB. und folgends der ∠ bey D wird □ seyn, dem ∠ bey C. — d. 27. 3.

Auff solche Weiß werden auch die drey übrige ∠ einander □ bewiesen: dahero ist die Figur auch gleich-fünff-eckicht.

Welches zu machen ware.



Die XII. Vorgab.

Handgriff.

Umb einen vorgegebenen Zirckel (FGHIK) eine gleich- fünffseitige, und gleich-fünffeckigte Figur zu schreiben.

Handgriff.

Schreibe in dem Zirckel die gleichsfünff eitige, und gleichsfünffeckichte Figur FGHIK ein. — d. 11. 4.

Ziehe auß dem gefundenen Mittelspunct L in die fünff Ecke die geraden Linien LF, LG, LH, LI, LK; welche den Umbkreiß deß Zirckels berühren.

Auff sothaner Linien Ende F, G, H, I, K, oder Berührung deß Zirckels, ziehe die anrührende Linien AB, BC, CD, DE, EA, welche sich in den fünff Ecken A, B, C, D, E werden zusammen stossen, und die verlangte Figur machen, (wie es in dem vorgehenden schon bewiesen worden ist). — d. 17. 3.

Entzwischen ziehe die Puncten LD, LE, LA, LB, LC zusammen.

Beweiß.

Dieweilen auß dem Punct A die zwey Linien AF, AK, (so den Zirckel in denen Puncten F, und K berühren) gezogen seynd. — d. d. Hand.

So wird die Linie AF ⊓ seyn, der Linie AK — d. Cor. 2. 36. 3.

Nunmehro seynd in dem △ FAL die Seiten AF, und FL ⊓, denen zwo Seiten AK, und KL in dem △ KAL — d. d. Vor. und 15. def. 1.

Die Seiten LA ist auch beyden △ gemein.

Dahero wird der △ FAL ⊓ seyn, dem △ KAL. — d. 8. 1.

Und folgends der ∠ l ⊓, dem ∠ m.

Eben auff dieſe Art, wird der ∠ h □ ſeyn, dem ∠ i.

Darauß ſchlieſſet man aber, daß der ∠ l, oder m geradt die Helffte von dem gantzen ∠ l + m ſeyn müſſe auch der ∠ h, oder i geradt die Helffte von dem ∠ h + i.

Unterdeſſen iſt wegen gleicher Seiten und Bögen FK, und FG deß eingeſchriebenen Fünff-Ecks, der ∠ l + m □, dem ∠ h + i. d. 27. 3.

So folget, daß auch die Helffte, nemlich der ∠ i, oder h □ ſeye, dem halben ∠ l, oder m. d. 6. ax. 1.

Ferner iſt in dem △ FBL der ∠ BEL □, dem ∠ AFL im △ FAL, d. d. Hand.
und der ∠ i □, dem ∠ l: und die Seiten FL beyden △ gemein. d. d. Vor.

Deßwegen wird der △ FBL □ ſeyn, dem △ FAL, d. 26. 1.
und folgends die Linie BF □, der Linie AF.
Auff ſolche Weiſe iſt auch EK □, der Linie AK.
Das iſt, AF wird geradt die Helffte von AB: und AK von AE ſeyn.

Es iſt aber bewieſen worden, daß AF □ ſeye, AK. d. d. Vor.
Deßwegen die gantze Seiten AB □ ſeyn werde, der gantzen Seiten AE. d. 2. ax. 1.
u. ſ. f werden alle Seiten dieſer Figur einander gleich ſeyn.

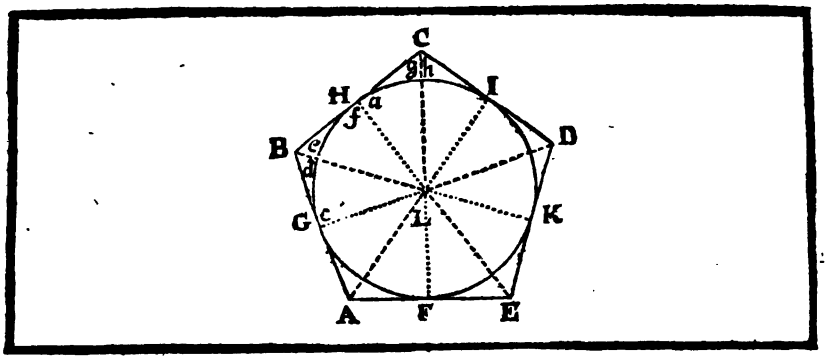
Sie iſt auch gleichwincklicht: dann in denen zwey vierſeitigen Figuren LGBF, und LFAK (deren Winckeln ſammentlich in einer jeden vier rechten gleich ſeynd) ſeynd die zwey ∠ bey G, und F. d. an. 32. 1. d. d. Hand.
Und abermahlen die zwey ∠ bey F, und K zwey rechte:

So iſt auch der ∠ h + i □, dem andern ∠ l + m. d. d. Vor.

Wenn man nun beyderſeits die gleichen ∠ von denen vier rechten abziehet, ſo wird überbleiben der ∠ a + b □, dem ∠ e + f.
u. ſ. f.

Daher iſt die umbſchriebene Figur auch gleich-fünffeckicht.

Welches zu machen ware.



Die XIII. Vorgab.

Handgriff.

In eine gleich-fünffſeitige, und gleich-fünffeckichte Figur (ABCDE) einen Zirckel (FGHIK) einzuſchreiben.

Handgriff

Zertheile gerad̃t entzwey die zween nechſt an einander gelegene ∠ d + e, und g + h mit denen geraden Linien BL, und CL, welche nothwendig in einem Punct, als nemlich in L werden zuſammen kommen müſſen, (dann weder der ∠ e, noch der ∠ g rechte ∠ ſeynd). d. 9. I. d. 11. ax. I. d. d. Vorg.

Auß L ziehe die Bleyrechte Linien LF, LG, LH, LI, LK auff die Seiten AE, AB, BC, CD, DE. d. 12. I.

Schreibe letztlich auß dem Punct L mit der Weite LG, oder LH, u. ſ. f. einen Zirckel, welcher auch die übrige vier Seiten berühren werde.

Beweiß.

In dem △ CHL iſt der ∠ a ⊓, dem ∠ f in dem △ BHL und der ∠ g ⊓, dem ∠ e. d. d. Hand. d. d. Hand.
Auch die Seiten LH iſt beyden △ gemein.

Daherò iſt der △ CHL ⊓, dem △ BHL. d. 26. I.

Und folgends die Linie CH ⊓, der Linie HB.
Alſo wird auch die Linie BG ⊓ ſeyn, der Linie GA.

Die gantze Seiten CB, und BA ſeynd aber einander gleich. d. d. Vorg.
Dahero werden ihre Helffte, als wie HB und BG, auch einander gleich ſeyn. d. 6. ax. I.

Unterdeſſen iſt wegen der rechten ∠ f, und c das □ auff BL ⊓, denen zwey □, ſo wohl auff LH, und HB, als denen zwey □ auff LG, und BG. d. 47. I.

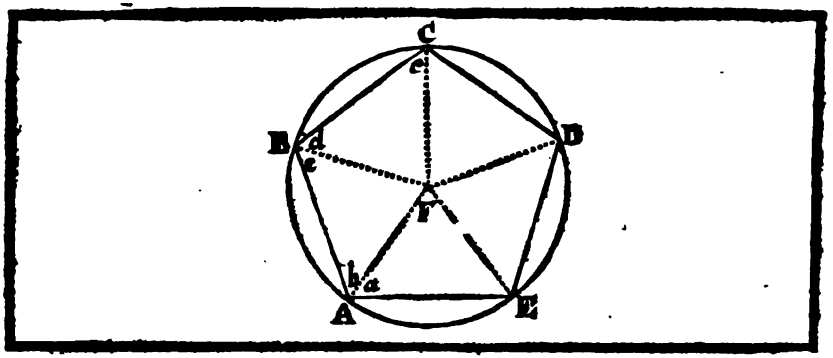
Wenn nun beyderſeits die □ auff denen gleichen Linien HB, und BG
abgezogen werden:
So wird überbleiben das □ auff LH ⌐, dem □ auff LG,
und wird auch die Linie LH ⌐ ſeyn, der Linie LG. b.4.an.46.1.
Auff ſolche Manier werden die übrige Linien LI, LK, LF einander ⌐ ſeyn.
Darauß ſchlieſſet man, daß der Zirckel, ſo auß dem Punct E mit der
Weite LG beſchrieben worden iſt, auch die übrige vier
Seiten berühren werde. Und dahero in die Figur ein-
geſchrieben ſeye.
Welches zu machen ware.

Folge.

Wenn in einer gleichſeitigen, und gleichwincklichten
Figur, die zween nechſtgelegene ∠ mit zweyen ge-
raden Linien, (welche ſich einander durchſchneiden)
gleich entzwey zertheilt werden; Auß dem Durch-
ſchnitts-Punct hernach man auch in die
übrige ∠ der Figur gerade Linien ziehet: ſo werden alsdann die
übrige ∠ der Figur hierdurch auch gleich entzwey
geſchnitten werden.

Anmerckung.

Auff dieſe Art kan man in eine jede gleichſeitige,
und gleichseckichte Figur einen Zirckel einſchreiben.



Die XIV. Vorgab.

Handgriff.

Umb eine fünff-gleichſeitige, und gleich-fünff-eckichte Figur (ABCDE) einen Zirckel zu ſchreiben.

Handgriff.

Zertheile geradt entzwey die zween ∠ a, b, und e, d: mit denen zwo geraden Linien AF, BF, welche nothwendig in einem Puncten, als wie hier in F zuſammen kommen werden. Welches in dem vorhergehenden ſchon bewieſen worden iſt. — 9. I. — 11. ax. I.

Auß F ziehe in die übrige ∠ E, D, C gerade Linien.

Alsdann auß F mit der Weite FA ſchreibe einen Zirckel, welcher umb die übrige vier Ecke der Figur gehen werde.

Beweiß.

Die gantze ∠ A, B, C, D, E ſeynd einander ⊓, — 8. d. Vorg.

Daher auch ihre Helffte a, b, c, d, e. u. ſ. f. — 7. Cor. 13. 4.

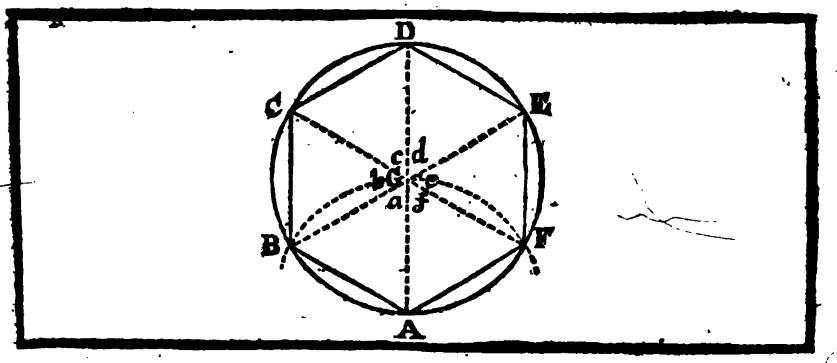
Nun ſeynd in dem △ CFB die ∠ d, und e ⊓, den ∠ c, und b im △ BFA. und die Seiten BC iſt ⊓, der Seiten BA. — 8. d. Hand.

Folget, daß auch CF ⊓ ſeye, der AF: — 8. d. Vorg.

Auff ſolche Weiſe werden alle Linien CF, BF, AF, EF, DF einander ⊓ ſeyn, — 26. I.

Darumb wird der Zirckel, welcher auß F, mit der Weite FA, iſt beſchrieben worden, auch durch die euſſerſte Ende, als durch B, C, D, E gehen, und die Ecke der Figur anrühren.

Welches zu machen ware.



Die XV. Vorgab. Handgriff.

In einem vorgegebenen Zirckel eine gleich-ſechs-eckichte, und gleich-ſechs-ſeitige Figur (ABCDEF) einzuſchreiben.

Handgriff.

Ziehe den Diameter AD. Nehme die Helffte AG, und ſchreibe auß A einen Zirckel, welcher den vorgegebenen in denen zwey Puncten B, und F durchſchneiden, und zwey drey-gleich-ſeitige △ ABG, und AFG geſtalten werde. d. 1. 1.

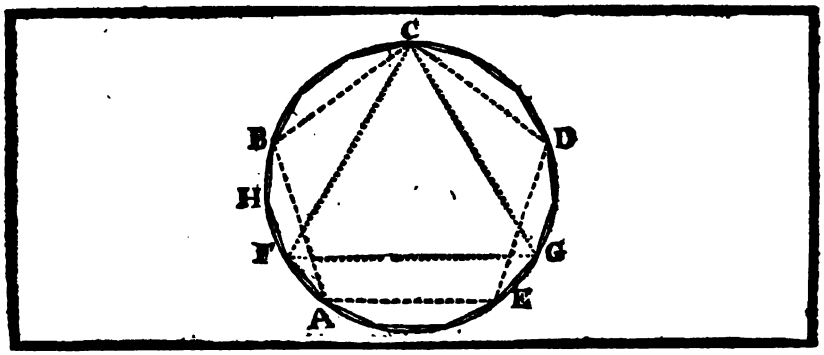
Auß B, und F ziehe durch den Mittel-Punct G die geraden Linien BGE, FGC, biß in den Umbkreiß, und hange hernach die Puncten A, B, C, D, E, F zuſammen, ſo iſt es gemacht.

Beweiß.

Die zwey △ BGA, AGF ſeynd gleichſeitig, und gleichwincklicht, d. d. Hand. und 5. 1.
Dahero geltet ein jeder ∠ darvon, als wie a, und f $\frac{1}{3}$ zweyer rechten. d. 3. Cor. 32. 1.

Und folgends werden die zwey ∠ a und f □, $\frac{2}{3}$ von zweyen rechten ſeyn.
Unterdeſſen wegen der geraden Linie BGE, ſeynd die drey ∠ a + f + c □, zween rechten: d. 13. 1.
Dahero iſt auch der ∠ c □, $\frac{1}{3}$ zweyer rechten.
Nun ſeynd die ∠ a + f + c □, denen überſtehenden ∠ d + c + b, d. 15. 1.
Deßwegen werden alle dieſe ſechs ∠ einander □ ſeyn,
Und folgends werden die ſechs Umbkreiß-Stücke, worauff ſie ſtehen, d. 26. 3.
und hernach die ſechs Seiten einander □ ſeyn. d. 29. 3.
Letztlich ſeynd die ſechs ∠ ABCDEF wegen der gleichen ∠ bey dem Mittel-Punct G auch einander □; d. d. Von
(Dann ein jeder $\frac{2}{3}$ geltet) dahero iſt die Figur auch gleich-eckicht.
Welches zu machen ware.

Folge. Die Seiten eines gleich-ſeitigen und gleich-eckichten Sechs-Eck iſt □, dem halben Diameter deſſelben Zirckels, in welchen diß Sechs-Eck eingeſchrieben iſt.



Die XVI. Vorgab.

In einem vorgegebenen Zirckel eine gleich- funfftzehn-seitige, und gleich-funfftzehn-eckichte Figur einzuschreiben.

Handgriff.

Schreibe den gleichseitigen △ FCG in den Zirckel ein, d. 2. 4.
Abermahlen auß C. schreibe die fünff-gleichseitige und gleich-fünffeckichte Figur ABCDE ein. d. 11. 4.
Zertheile das Umbkreiß-Stück FB gleich entzwey im Punct H. d. 30. 3.
Nun sage ich, daß FH, oder CH ein gleicher Theil oder Seiten von denen funfftzehen seye.

Beweiß.

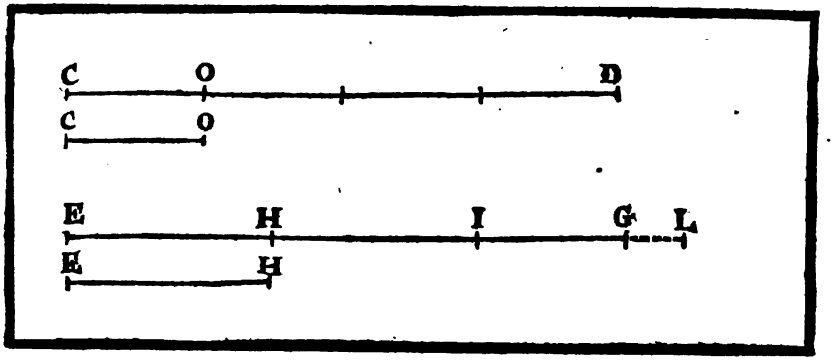
Weilen der gantze Umbkreiß des Zirckels, 15. gleiche Theile halten solte: d. d. Vorg.
So wird die Seiten CF deß △ FCG fünff von diesen gleichen Theilen, das ist $\frac{5}{15}$, unterspannen.
Und die Seiten BC deß Fünff-Ecks, drey von diesen Theilen, oder $\frac{3}{15}$.
Der Unterschied aber zwischen den Bogen CF, und CB ist das Umbkreiß-Stück BF, oder $\frac{2}{15}$. d. d. Hand.
Dahero wird FH, oder FB nothwendig $\frac{1}{15}$, oder nur ein gleicher Theil von den 15. seyn müssen. d. d. Hand.
Ziehet man letzlich FH, oder FB zusammen, und stellet solche Länge 15. mahln in den Zirckel herum,
So wird die verlangte gleich-15-seitige, und winckelichte Figur darauß erwachsen. d. 4. 1. u. 2. 27. 3.
Welches zu machen ware.

Das

Fünffte Buch

Deß Teutsch-redenden

Euclides.



Wort = Erklärungen.

I.

Ein Theil (Pars) iſt eine kleinere Gröſſe, welche in einer gröſſern etliche mahln begriffen iſt, und ſolche außmeſſet.

Alſo wird CO ein Theil der Gröſſe CD ſeyn: dann die kleinere CO, die andere und gröſſere CD viermahlen auffmeſſet; oder, ſo ein Ding iſt, weilen die gröſſere CD die kleinere CO viermahlen begreifft, ſo wird deßwegen CO ein Theil von CD ſeyn.

Anmerckung.

1.

Das Außmeſſen und Begreiffen iſt zweyerley, wenn ein Theil eine Gröſſe geradt auffmeſſet, oder wenn das Gantze dieſen Theil geradt begreifft, daß nichts übrig verbleibet, ſo nennet man einen ſolchen Theil, einen geradt-auffmeſſenden Theil, in Latein (pars aliquota). Alſo iſt allhier CO ein geradt-auffmeſſender Theil der Gröſſe CD: dann CO die Gröſſe CD gerad viermahlen auffmeſſet, (oder ſo ein Ding) CD begreiffet den Theil CO geradt viermahlen.

2.

Hierentgegen ein Theil, welcher eine Gröſſe nicht geradt auffmeſſet, oder daß das gantze dieſen Theil nicht geradt begreifft, ſondern jederzeit etwas zu viel, oder zu wenig überbleibet: ſo wird ein ſolcher Theil ein nicht geradt auffmeſſender (Pars aliquanta) genannt.

Zu einem Exempel, wenn man den Theil EH dreymahln nemmet, ſo übertreffet er die Gröſſe EG umb das Stück GL; nemmet man aber EH zweymal, ſo gehet noch das Stück IG ab; dieſem nach wird EH ein nicht geradt auffmeſſender Theil der Gröſſe EG genandt.

3.

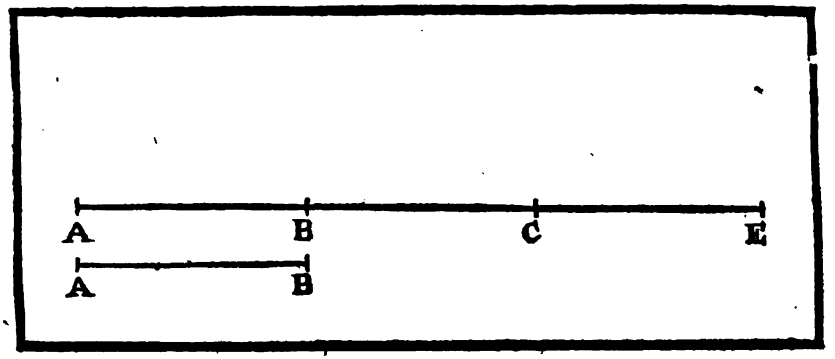
Ein geradt-auffmeſſender Theil empfanget ſeine Nennung her, von der Anzahl, wie offt er nemlich ſeine Gröſſe, deſſen Theil er iſt, geradt auffmeſſet: oder von der Anzahl deren gleichen Theile, in welche er ſeine Gröſſe abtheilet. Dieſem nach, wann ein Theil ſeine Gröſſe zweymahln geradt auffmeſſet, ſo nennet man ihn ein halbes; wird in Ziffern alſo geſchrieben $\frac{1}{2}$: Einen Theil, welcher ſeine Gröſſe geradt dreymahln auffmeſſet, nennet man ein Drittheil, oder $\frac{1}{3}$. der viermahln geradt auffmeſſet ſeine Gröſſe, ein Viertheil oder $\frac{1}{4}$. u. ſ. f.

4.

Es geſchicht, daß bißweilen ein nicht geradt auffmeſſender Theil einer Gröſſe, dannoch gewiſſe geradt-auffmeſſende Theile, welche ihn, und ſeine Gröſſe geradt auffmeſſen, habe, als wie 10 iſt ein nicht geradt-auffmeſſender Theil von 16, hat doch ein gewiſſen geradt-auffmeſſenden Theil, nemlich 2. welcher ein Achttheil von 16, und ein Fünfftheil von 10. iſt. Deßwegen werden 10. fünff Achttheil von 16. ſeyn, welches man alsdann auff ſolche Art ſchreibet $\frac{5}{8}$.

5.

Man nennet ſo wohl die geradt, als nicht geradt-auffmeſſende Theile, Brüche oder Fractionen ihrer Gröſſe, darvon ſie Theile ſeynd; ſie werden alſo gezeichnet, daß allzeit die Theile von ihrer Gröſſe oder einer Linien, und ihr gantze Gröſſe unter der Linien geſchrieben ſeynd. Die oben ſtehende Zahl oder Theile, werden hernach der Zehler, die unter den Strich aber, oder ihr gantzes, der Nenner genandt. Alſo in dem Bruch $\frac{2}{3}$. iſt 2. der Zehler, und der 3. der Nenner. Von dieſen iſt ein mehrers in der Rechen-Kunſt zu finden.



II.

Eine Gröſſe, in welcher der kleinere Theil in gewiſſer Anzahl geradt-auffmeſſend begriffen iſt, nennet man eine vielfache Gröſſe (multipex). Die Linie AE iſt eine vielfache Gröſſe der kleinern AB: dann AB dreymahlen genommen, die Gröſſe AE auffmeſſet.

Anmerckung.

I.

Eine vielfache Gröſſe, welche einen kleinern Theil in gewiſſer Anzahl geradt-auffmeſſend begreiffet, wird ſchlecht hin Vielfache (multiplex), die kleinere Gröſſe aber, oder eine Theil, welcher in der vielfachen geradt begriffen iſt, Unter-vielfach (ſubmultiplex) genandt; auff ſolche Weiſe iſt die Linie AE von 3 Schuh lang, die vielfache, und der Theil, oder die Linie AB, ſo 2 Schuh lang iſt, die Unter-vielfache der Linie AE.

2.

Gleichformig-vielfache Gröſſe ſeynd, welche in gleicher Anzahl ihre Theile, deren ſie ihre vielfache ſeynd, begreiffen: oder, ſo ein Ding iſt, welche gleich auffgemeſſen werden von ihrem Theile. Nach ſolcher Art ſeynd zwey Linien, deren eine 25, die andere aber 15 Klaffter lang iſt, gleichformig-vielfache Gröſſen zweyer andern Linien, deren eine 5, die andere aber 3 Klaffter lang iſt, die Urſach iſt, weilen 25, ſo offt durch 5, nemlich fünffmahln, als 15 durch 3, nemlich auch fünffmahl geradt auffgemeſſen wird, Solche Theile 5 und 3 hernach werden auch gleichformige Theile ihrer Gröſſen 25 und 15 genandt.

III.

Wenn zwey Gröſſe von einerley Gattung, ihrer Gröſſe halber, gegen einander gehalten und verglichen werden, ſo nennet man die Beziehung, welche eine zu der andern hat, eine Verhältnuß (Ratio).

Anmerckung. I.

Durch die Gröſſe, ſo in Latein quantitas genannt wird, verſtehet man hierinnen nicht allein, was lang, breit und tieff iſt, oder andere Außtemmung und Dicke hat; ſondern man nennet auch dasjene allhier eine Gröſſe, welches nur das Mehr, und das Weniger leydet. Gleich wie die Gewichter, Stärcke, Bewegung, Stimme, Zeite, Lauff, u. ſ. f. dann man jederzeit ſagen kan, daß Gewicht iſt mehr ſchwer, oder ſchwerer, als das andere; dieſe Stärcke iſt weniger ſtarck (oder mit einem Wort) ſchwächer, als die andere; dieſe Bewegung iſt mehr ſchnell, od er ſchneller, als die andere; dieſe Stimme iſt ein wenig höher, oder, ſo ein Ding, höher, als die andere, u. ſ. f.

2.

Wenn eine Vergleichung angeſtellt wird, ſo müſſen die zwey Gröſſe allzeit einerley Gattung, oder Geſchlechts ſeyn: als wie Zahlen gegen Zahlen, Linien gegen Linien, Mäſſe gegen Mäſſe, Bewegung gegen Bewegung, u. ſ. f. beyde hernach können gleich oder ungleich einander ſeyn.

3.

Wenn nun beyde Sachen, ſo man gegen einander vergleichet, gleiche Gröſſe haben; als wie zu einem Exempel, man vergleichet eine gerade Linie von zwey Schuhen, zu einer andern geraden Linie eben von 2 Schuhen lang, ſo wird demnach in ſolcher Gegeneinanderhaltung und Vergleichung die Verhältnuß, Eine Verhältnuß einer Gleichheit (Ratio Æqualitatis) genandt.

4.

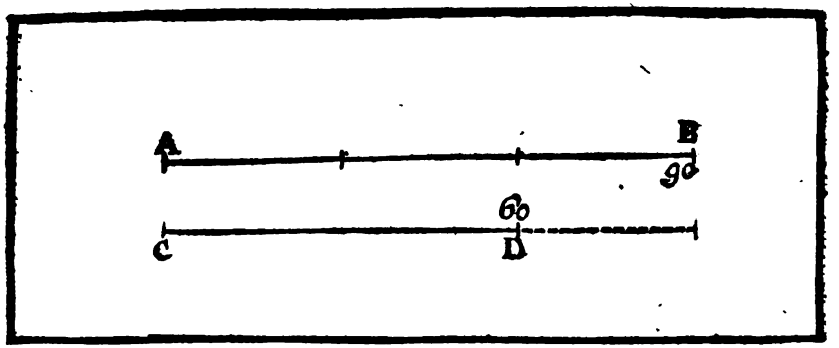
Seynd aber die gegen einander gehaltene Dinge von einer verſchiedener Gröſſe; gleich wie, wann man eine Länge von 4. Schuhen, gegen einer kürtzern von 2 Schuhen vergleichet, ſo heiſſet man die Verhältnuß, ſo eine gegen der andern hat, eine Verhältnuß einer Ungleichheit (Ratio inæqualitatis).

5.

Die erſte Gröſſe, oder Sach, ſo zu der andern in einer Vergleichung gehalten wird, nennet man das Vorgehende (Antecedens); die andere aber, zu welcher die erſte gehalten worden, das Nachgehende, oder Folgende (Conſequens).

6.

Eine Verhältnuß einer gröſſern Ungleichheit iſt, wann in einer Vergleichung das Vorgehende gröſſer, als ſein Nachgehendes, iſt.



Als wie in dirſem Exempel, wann eine Linie AB von 90 Schuhe lang zu einer andern, und kürtzern, als wie CD von 60 Schuhe lang verglichen wird.

7.

Eine Verhältnuß einer kleinern Ungleichheit iſt, wann in der Vergleichung, das Vorgehende kleiner, als das Nachgehende, iſt: alſo wann man die kürtzere Linie CD von 60 Schuhen, zu der längern AB von 90 Schuhen haltet und vergleichet.

8.

Die Gröſſe der Verhältnuß einer Sache zu der andern in einer Vergleichung, wird durch die Zertheilung gefunden. Dann man zertheilet die Anzahl der Gröſſe deß Vorgehenden, durch die Anzahl der Gröſſe deß Nachgehenden. Die neu-s entſtandene Anzahl, oder Quotient, weiſet hernach die Gröſſe der Verhältnuß an, und welche eine die andere übertreffet, oder ob beyde gleich ſeynd. Zu einem Exempel, es ſeynd die zwey Linien AB, CD von ungleicher Gröſſe, die erſte iſt 90 die andere 60 Schuh lang. Nun zu wiſſen die Verhältnuß ihrer Gröſſe, ſo zertheilet man 90 durch 60, wodurch der Quotient $1\frac{30}{60}$, oder $1\frac{1}{2}$ entſtehet, welcher die Gröſſe der Verhältnuß der Linie AB, zu der Linie CD iſt; und ſagen will, daß erſtlich die Linie AB einmahl ſo groß ſeye, als die Linie CD, hernach über diß, daß die Linie AB noch die Helffte von der Linie CD habe. Das iſt, die Linie AB iſt anderthalb mahl ſo groß, als die Linie CD. Wann nun die andere Linie CD, ſo 60 Schuhe lang iſt, noch ihre Helffte, nemlich 30 Schuhe, welche ihr abgehen, darzu hätte, ſo würde ſie gleich lang der erſten ſeyn, das iſt, ſie hätte auch eine Länge von 90 Schuhen.

9.

Ein ſolcher Abgang wird genandt, Unterſcheid (differentia).

10.

Wann in einer Verhältnuß einer gröſſern Ungleichheit das Vorgehende ſeines Nachgehenden vilfach iſt, nemlich, daß ſie es geradt zweymahln, dreymahln, viermahln, u. ſ. f. begreiffet, allzeit ohne Bruch, ſo wird

die Gröſſe der Verhältnuß, oder kurtz hinweg, die Verhältnuß, zweyfach oder doppelt, dreyfach, vierfach, u. ſ. f. genandt (Ratio dulpa, tripla, quadrupla) alſo iſt die Verhältnuß 8 zu 4, doppelt, 12 zu 3 iſt vierfach.

Entgegen in einer Verhältnuß einer kleinern Ungleichheit, wann das Nachgehende ſeines Vorgehenden vielfach iſt, nemlich daß ſie es geradt zweymahln, dreymahln, viermahln, u. ſ. f. begreiffet, allzeit ohne Bruch, ſo wird die Verhältnuß, unter doppelt, unter dreyfach, unter vierfach, u. ſ. f. geheiſſen (Ratio ſubdupla, ſubdripla, ſubquadrupla). Alſo iſt die Verhältnuß 4 zu 8 unterdoppelt, 3 zu 12 unter vierfach.

11.

Wann in einer Verhältnuß einer gröſſern Ungleichheit das Vorgehende ſein Nachgehendes erſtlich geradt einmahlen, hernach noch nur einen geradt-auffmeſſenden Theil darvon, auff ſolche Geſtalt begreiffet, daß die Gröſſe der Verhältnuß alſo ſeye $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. $1\frac{1}{4}$. u. ſ. f. ſo wird es genant eine übertheilige Verhältnuß (Ratio ſuper particularis), und wegen den beygeſetzten einigen geradt auffmeſſenden Theil, oder Bruch, eine und ein halbfache Verhältnuß; Eine und ein Drittheilfache; Eine und ein viertheilfache, u. ſ. f. (Ratio ſeſquialtera, ſeſquitertia, ſeſquiquarta). Alſo iſt die Verhaltnuß 12 zu 8 übertheilig eine und anderthalbfache. 18 zu 15 übertheilig eine und ein fünfftheilfache

In einer Verhältnuß einer kleinern Ungleichheit wird, geſtalt dieſer Sachen, bloß das Wörtlein Unten (ſub) mit und vorgeſprochen. Als wie in der Vergleichung 8 zu 12 iſt die Verhältnuß unten übertheilig eine und anderthalb fache: 15 zu 18, unten übertheilig eine, und ein fünfftheilfache. (Ratio ſubſeſquialtera, ſubſeſquiquinta).

12.

Wann in einer Verhaltnuß einer gröſſern Ungleichheit das Vorgehende ſein Nachgehendes erſtlich geradt einmahln, hernach noch etliche geradt-auffmeſſende Theile, (welche aber kein gantzes machen) auff ſolche Weiſe begreiffet, daß die Gröſſe der Verhältnuß alſo ſeye $1\frac{2}{3}$. $1\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. ſo wird erſtlich die Verhaltnuß eine übertheilende (ſuperpartiens), wegen deren beygeſetzten geradt auffmeſſenden Theile aber, oder Bruch, eine und zwey Drittheil übertheilende. Ein und drey Viertheil übertheilende. Eine und ſieben Achttheil übertheilende, genant (Ratio ſuperbipartiens tertias, ſupertripartiens quartas, ſuperſeptupartiens octavas). Als wie in der Vergleichung 5 zu 3 iſt die Verhältnuß ein und zwey Drittheil übertheilende. 21 zu 15, eine und zwey Fünfftheil übertheilende. 136 zu 72, ein und acht Neuntheil übertheilende. u. ſ. f.

In der Verhältnuß einer kleinern Ungleichheit wird geſtalt dieſer Sachen, bloß das Wörtlein Unten (ſub) mit und vorgeſprochen. Als wie in der Vergleichung 3 zu 5 iſt die Verhaltnuß unten eine und zwey Drittheil übertheilende. 15 zu 21 iſt unten eine und zwey fünfftheil übertheilende. 72 zu 136 iſt unten eine und acht Neuntheil übertheilende

theilende (ſubſuperbipartiens tertias, ſubſuperbipartiens quintas, ſubſuperoctupartiens nonas).

13.

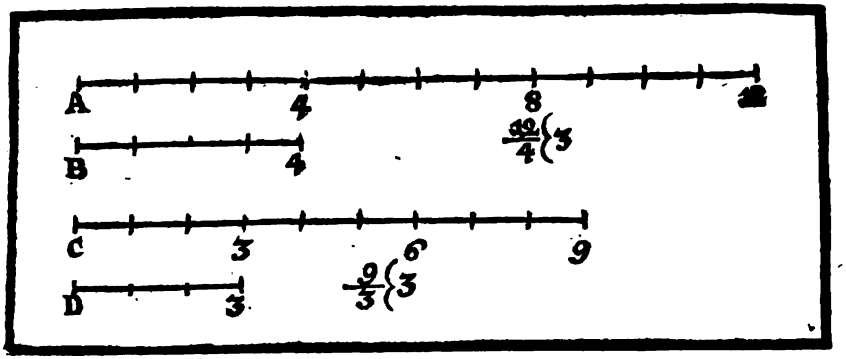
Wann in einer Verhältnuß einer gröſſern Ungleichheit das Vorgehende ſeines Nachgehenden vielfach iſt, und nebſt diſen noch nur einen geradtauffmeſſenden Theil darvon auff ſolche Weiſe begreiffet, daß die Gröſſe der Verhältnuß ſeye, als wie $2\frac{1}{2}.4\frac{1}{7}.8\frac{1}{2}$: ſo wird es genant eine vielfache übertheiliche Verhaltnuß (Multiplex ſuperparticularis und wegen den beygeſetzten Bruch, oder einigen auffmeſſenden Theil, alſo ſammentlich außgeſprochen: Eine doppelte und eine achtfache Verhältnuß: Vier und ein Drittheilfache: acht und ein halbfache. (Ratio multiplex ſuperparticularis dupla ſeſquioctava. Quadrupla ſeſquitertia. Octupla ſeſquialtera. Alſo iſt in der Vergleichung die Verhältnuß 7 zu 2 drey und ein halbfach, 10 zu 3. drey und ein Drittheilfach. 31 zu 5 ſechs und ſechsfach (Tripla ſeſquialtera, Tripla ſeſquitertia ſextupla ſeſquiſexta).

Entgegen in einer Verhältnuß einer kleinern Ungleichheit wird geſtalt dieſer Sachen bloß das Wörtlein Unten (ſub) mit und vorgeſprochen. Als wie in der Vergleichung 2 zu 7 iſt die Verhältnuß. Unten dreyund ein halbfach. 3 zu 10. Unten drey und ein Drittelfach. 5 zu 31 Unten ſechs und ein ſechsfach (Ratio ſubtripla ſeſquialtera. Subtripla ſeſquitertia. Subſextupla ſeſquiſexta).

14.

Wann letzlich in einer Verhältnuß einer gröſſern Ungleichheit das Vorgehende ſeines Nachgehenden vielfach iſt, und nebſt dieſen noch etliche geradt-auffmeſſende Theil, welche nicht ein gantzes machen, auff ſolche Weiſe darzu begreiffet, daß nemlich die Gröſſe der Verhältnuß ſeye $2\frac{2}{3}.4\frac{3}{8}.6\frac{1}{2}$: ſo wird die Verhältnuß eine vielfache übertheilende (Multiplex ſuperpartiens), und wegen dero beygeſetzten geradt auffmeſſenden Theile, oder Bruchs, ſammentlich auff dieſe Weiſe außgeſprochen. Eine doppelte und zwey Drittheil übertheilende Verhältnuß Vierfache und dreyviertheil übertheilende. Sechsfache und fünff Sechstheil übertheilende. (Ratio multiplex dupla ſuperbipartiens tertias. Quadrupla ſupertripartiens quartas. Sextupla quintupartiens ſextas). Alſo wird in der Vergleichung 29 zu 7 die Verhältnuß ſeyn. Doppelt und ſechs Siebentheil übertheilende 19 zu 5, dreyfach und vier Fünfftheil übertheilende. 59 zu 10 fünfffach und neun Zehentheil übertheilende. (Ratio dupla ſuperſextupartiens ſeptimas. Tripla quadrupartiens quintas. Quintupla Nonupartiens decimas).

In einer Verhaltung einer kleinern Ungleichheit, geſtalt dieſer Sachen, wird anders darinnen nicht verändert, als bloß das Wörtlein Unten wird mit und vorgeſprochen. Alſo in der Vergleichung 7 zu 20, iſt die Gröſſe der Verhältnuß unten doppelt, und ſechs Siebentheil übertheilend. 10 zu 59, unten fünfffach, und neun Zehentheil übertheilend. 5 zu 19 unten dreyfach, und vier Fünfftheil übertheilend.



IV.

Eine Proportion iſt eine Gleichformigkeit deren Verhaltnüſſen.

Annerckung.

1.

In Vergleichung zweyer Gröſſen von einerley Gattung iſt die Beziehung, ſo eine zu der andern hat, eine Verhältnuß genandt, wie auß der 2. def. dieſes Buchs abzunehmen iſt. Wann nun mehr Gröſſen, als zwey, gegen einander vergleichet werden, und man ihre Verhältnuſſe einander gleichformig befindet, ſo nennet man hernach eine ſolche Gleichformigkeit deren Verhaltnüſſe eine Proportion. Zu einem Exempel, wann die Verhältnuß der Gröſſe A zu der Gröſſe B gleichformig iſt, der Verhältnuß der Gröſſe C zu der Gröſſe D, wie es ſich auch allhier in der Wacheit alſo befindet, dann beyderſeits die Gröſſe der Verhaltnüſſe, als wie 3 zu 1 ſeynd: So ſaget man demnach, daß ein ſolche Gleichformigkeit deren Verhältnüſſen, eine Proportion ſeye.

O 2.

Was hier eine Proportion und eine Gleichformigkeit deren Verhältnüſſen genannt wird, nennen bißweilen die Lateiner eine Proportionalität (Proportionalitas) und die Verhaltnuß allein eine Proportion: nach dieſer Art wäre zwiſchen zweyen Gröſſen eine Proportion, und zwiſchen gleichförmigen Verhältnüſſen eine Proportionalität.

V.

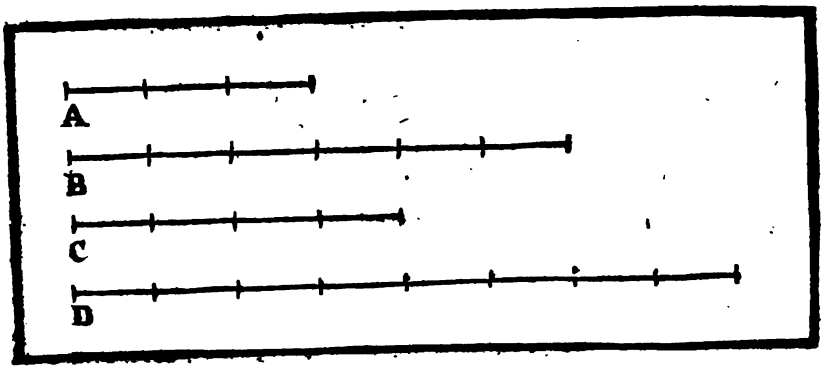
Die jene Gröſſen haben eine Verhältnuß gegen einander, wann deren eine etlich mahlen genommen, oder vermehrter, die andere letzlich übertreffen kan.

Außlegung.

Dieweilen die Verhältnuſſe in einer gewiſſen Gröſſe, Kleine, oder Gleichheit, in dem mehr, wenig und gleich beſtehen: ſo iſt klar, daß man das Kleinere, Wenigere und Gleiche ſo offt nehmen, und vermehren kan, biß es endlich das Gröſſere, das Mehrere, und das Gleiche übertreffe. Alſo iſt zwiſchen einer Linie von 2, und einer andern von 6 Klafftern eine Verhältnuß: dann die erſte Linie von 2, viermahlen genommen, die andere von 6 Klafftern ſchon umb 2 Klafftern übertreffet, u. ſ. f. Eine ſolche Verhältnuß wird genannt in Latein Ratio rationalis, und kan mit Zahlen ausgeſprochen werden: Im Gegentheil ſchlieſſet man, daß zwiſchen einer unendlichen, und endlichen Linie keine Verhältnuß ſeyn könne. Dann vermehre man die Endliche, ſo offt als man will, ſo wird ſie doch niemahlen die Unendliche übertreffen: alſo auch zwiſchen einer Linie und Fläche, zwiſchen einer Fläche und Cörper, zwiſchen einem geradt-liniſchen und Anrührungs-Winckel iſt keine Verhältnuß. So werden hierzu geſellet die Sachen, welche gar keine Gröſſe haben, als wie Puncten, Nullen, u. ſ. f.

Zwiſchen einer Zwerg-Linie und Seiten des Quadrats, kan eine Verhältnuß ſeyn: dann die Seiten kan vermehret werden biß ſie die Zwerg-Linie übertreffe; die Verhältnuß aber einer zu der andern iſt unaußſprechlich, wird im Latein Ratio Irrationalis, ſurda, das iſt, welche zwar in Linien kan angedeutet, nicht aber in Zahlen kan außgeſprochen werden.

Zwiſchen krum- und geraden Linien kan eine Verhältnuß ſeyn: dann dieſes gar ſchön Hippocrates Chius in der Figur, ſo dem wachſenden Monde nicht ungleich, bewieſen hat; Eben hat es gethan Archimedes, in der Zirckel-Meſſung, und Parabel-Vierung; und Proclus zwiſchen den geradt- und krummliniſchen Winckeln.



Anmerckung.

I.

Gemein-mäßliche Gröſſen (Magnitudinis commenſurabiles) ſeynd, welche durch einerley Zahl geradt auffgehendt mögen auffgemeſſen werden, daß nichts mehr überbleibet: alſo meſſet eine Groſſe von 2 Schuh lang, die von 6, und die von 8 Schuh lang, beyde geradt auff; nemlich 6 dreymahln, und 8 viermahln. Dahero ſeynd die Gröſſen von 6, und 8 Schuhe lang, gemein-mäßliche Gröſſe; die Groſſe von 2 Schuh aber, wird hernach die gemeine Zahl oder Gröſſe genandt.

2.

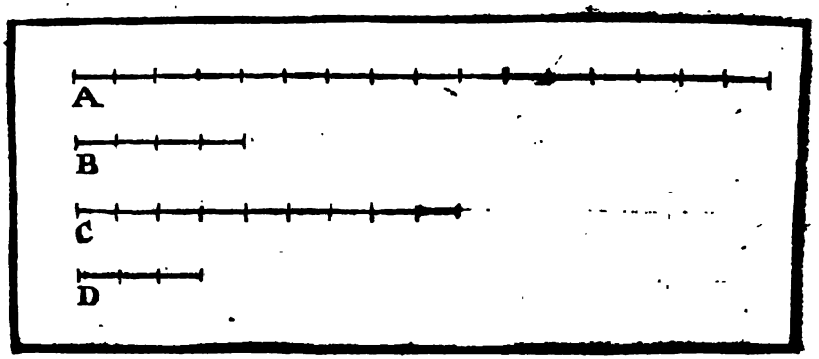
Gemein-unmäßliche Gröſſen (Magnitudines incommenſurabiles) ſeynd, wenn zwiſchen denen Gröſſen, keine gemeine Zahl, die ſie geradt auffmeſſet, kan gefunden werden. Dieſes geſchicht zwiſchen der Zwerg-Linie, und einer Seiten deß Quadrats. Darvon im zehenden Buch Euclides.

VI.

Die Gröſſe, ſagt man, haben einerley Verhältnuß unter einander, wenn die erſte zu der andern ſich verhaltet, gleich wie die dritte zu der vierten.

Außlegung.

Das iſt, wenn das äuſſerſt vorgehende ſo offt ſein Nachgehends begreiffet, als offt das anderte vorgehende ſein Nachgehends gleich begreiffet; oder, wann das erſte vorgehendt ſo offt von ſeinem Nachgehenden gleich bedriffen iſt, ſo offt das anderte vorgehende von ſeinen Nachgehenden begriffen wird. Zu einem Exempel; weilen allhier die erſte Gröſſe A 3 von der anderten B 6 zweymahln begriffen iſt: und die dritte Gröſſe C 4 auch geradt zweymahln von der vierdten Gröſſe D 8 begriffen iſt: So ſaget man, daß dieſe Gröſſen einerley Verhältnuß, oder Proportion unter ſich haben.



VII.

Die Gröſſen, ſo einerley Verhältnuß haben, werden Gleichverhaltende, oder Proportionirte Gröſſen genant.

Es ſeynd gegeben die vier Gröſſe in dem vorgehenden Exempel und Figur A 3. B 6. und C 4. D 8. Weilen nun dieſe vier Gröſſen einerley Verhältnuß unter ſich haben, nemlich ſo wohl A iſt zu B, als C zu D unterdoppelt; ſo nennet man auß dieſer Urſach die vier gegebene Gröſſen A, B, C, D, proportionirte, oder gleichverhaltende Gröſſe.

VIII.

Wann das erſte Vorgehende ein Nachgehendes mehr oder öffter in ſich begreiffet, als das andere Vorgehende ſein Nachgehendes; oder Wann das erſte Vorgehende ein gröſſerer Theil ſeines Nachgehenden, als das anderte Vorgehende ſeines Nachfolgenden iſt: ſo ſaget man alsdann, daß die erſte Gröſſe zu der anderten eine gröſſere Verhältnuß habe, als die Dritte zu der Vierten.

Zu einem Exempel. Das erſte vorgehende, oder Gröſſe A von 16 Schuh begreiffet ſein Nachgehendes, oder Gröſſe B von 4 Schuhe viermahln. Und das anderte Vorgehend, oder groſſe C von 9 Schuhe begreiffet ſein Nachgehendes, oder Gröſſe D von 3 Schuhe, nur drey mahln. Weilen nun die Gröſſe A die Gröſſe C mehr, oder öffter, als die Gröſſe C die Gröſſe D begreiffet (dann A begreiffet B viermahln, und C die Gröſſe D nur dreymahln): ſo ſaget man, daß A zu B eine gröſſere Verhaltnuß, als C zu D habe. Entgegen wann man D 3 zu C 9, und B 4 zu A 16 vergleichete: So würde D zu C, nemlich 3 zu 9 eine gröſſere Verhältnuß haben, als B zu A, nemlich 4 zu 16. Die Urſach iſt, weilen D ein gröſſerer, nemlich ein dritter Theil von C, und B, ein kleinerer, nemlich nur ein vierter Theil von A iſt.

IX.

Eine Proportion beſtehet auff das Wenigſte in dreyen Abſätze (Termini).

Außlegung.

In einer Proportion müſſen nothwendig zwey vorgehende und zwey Nachgehende ſeyn, dann wann nur ein Vorgehend, und ein Nachgehend wäre, es nur eine Verhaltnuß allein ſeyn würde. Nun kan ſich aber ſchicken, daß bißweilen in einer Proportion der mittlere Abſatz, zugleich die Stelle deß erſten Nachgehenden, und deß anderten Vorgehenden vertretten, und dahero die Proportion in dreyen Abſätze beſtehen möge: als wie in dieſer Proportion:

4. 8. 16.

Iſt der mittlere Abſatz 8: und die Proportion bedeutet ſo viel, als wann man ſagte: 4 haltet ſich zu 8, als wie dieſelbe 8 zu 16.

Eine ſolche Proportion hernach, worinnen der mittlere Abſatz zweymahlen wiederholet iſt, wird genant, eine ſtätte Proportion (proportio continua); in welcher aber der mittlere Abſatz nicht zweymahlen wiederholet wird, als wie allhier:

4. 6. 8. 12.

Die wird eine abgeſonderte Proportion (Proportio diſcreta) genandt.

X.

Wenn drey Gröſſe ſtets geproportionirt ſeynd, ſo ſagt man, daß die erſte zu der driten in einer zweymahligen Verhältnuß ſtehe, derſelben, welche die erſte zu der anderten hat (in Latein wird eine ſolche zweymahlige Verhältnuß duplicata ratio genannt).

Seynd aber vier Gröſſe ſtets geproportionirt, ſo ſaget man, daß die erſte zu der vierdten in einer dreymahligen Verhältnuß ſtehe derſelben, welche die erſte zu der andern hat, (wird in Latein Triplicata ratio genannt) und ſo fort, jederzeit umb eines mehr, ſo lang die Proportion fortgeführt wird.

Außlegung.

Es ſeynd gegeben die drey ſtetig geproportionirte Gröſſe A, B, C.

A. B. C.

27. 9. 3.

So ſaget man, daß die erſte Gröſſe A, zu der dritten C in einer zweymahliger Verhältnuß derſelben, welche die erſte A zu der anderten B hat, ſtehe. Die Urſach iſt, weilen zwiſchen A und C zwey Verhaltnuſſe, nemlich A zu B, und B zu C ſich befinden, deren eine jede inſonderheit gleich iſt, der Verhältnuß, welche die erſte A zu der anderten B hat, ſonſten nicht ſtets geproportionirt wären.

Wenn aber vier ſtets geproportionirte Gröſſe ſeynd, gleich wie A, B, C, D,

A. B. C. D.
81. 27. 9. 3.

So ſaget man, daß die erſte Gröſſe A, zu der vierdten D in dreymahliger Verhaltnus derſelben, welche die erſte A, zu der anderten B hat, ſtehe. Dann zwiſchen A, und D, drey Verhaltnüſſe, nemlich A zu B, und B zu C, und C zu D ſich befinden, deren eine jede inſonderheit gleich iſt, der Verhaltnuß, welche die erſte A zu der anderten B hat, ſonſten nicht ſtets geproportionirt wären. Wenn fünff ſtets geproportionirte Gröſſe ſeynd, ſo ſaget man alsdann, daß die erſte zu der fünfften in viermahliger Verhältnuß derſelben, welche die erſte zu der anderten hat, ſtehe u. ſ. f.

Anmerckung.

Wann in folgendem geſaget wird, daß zwey gleichformige flache Figuren zu einem Beyſpiel, zwey □ A, und B, (deren eine Seite von 8, die andere aber von 2 Schuhen iſt) in zweymahliger Verhaltnuß ihrer gleichformig-Haltnuß-ſagender Seiten gegen einander ſtehen: ſo verſtehet man dadurch folgendes: daß nemlich, wann man die zwey Seiten in dreyen Abſätzen ſtäts proportionirter fortführet:

Als wie hier 8. 2. $\frac{1}{2}$. ſich alsdann das Quadrat A zu dem □ B verhalte, gleich wie der erſte Abſatz, zu den dritten. Das iſt, es werde ſich verhalten das □ 64 zu dem □ 4 als wie 8 zu $\frac{1}{2}$.

Weilen aber 8 zu $\frac{1}{2}$ in zweymahliger Verhaltnuß ſtehet, derſelben, welche 8 zu 2 hat, ſo ſaget man aus dieſer Urſach, daß auch die 2 □ A, und B, in zweymahliger Verhaltnuß derſelben, welche 8 zu 2 hat, (das iſt, ihrer gleichformig-Haltnuß ſagenden Seiten), ſtehen.
Darvon in der 19 Vorgab deß 6 Buchs etwas mehrers zu leſen.

2.

Eine Proportion wird in folgenden auff ſolche Art angedeutet.
Geſetzt es ſeye gegeben, daß ſich A gegen B verhalte, gleich wie C gegen D, ſo ſchreibet man bloß hinweg. A. B: : C. D.
Oder wann man ſaget die Verhaltnuß A zu B, iſt gleich, der Verhaltnuß C zu D. So iſt eben ein Ding, ob man ſchreibe, A, B □ C, D, oder A, B: : C, D.

XI.

Gleichförmig-haltnuß ſagende Gröſſe (Magnitudines Homologæ) werden in einer Proportion genant, die zwey vorgehende, und die zwey Nachgehende.

Zu einem Exempel, es ſeye A, B: : C, D, ſo ſeynd die gleichformig-Haltnuß ſagende Gröſſe A und C, Item B und D

XII.

Eine verwechſelte Verhaltnuß (Alterna Ratio) iſt, wann ein Vorgehende, zu den andern Vorgehenden: Und ein Nachfolgende zu den andern Nachfolgenden gehalten, und verglichen wird.

Alſo, wann anfänglich die Proportion iſt

A. B. : : C. D.
9. 3. : : 6. 2.

So wird durch die Verwexlung (Alternè, vicisſim, oder permutando) die Proportion ſeyn

A. C. : : B. D.
9. 6. : : 3. 2.

Mercke: wann man die Verwechslung in einer Proportion gebrauchen will, ſo müſſen alle vier Gröſſe von einerley Gattung ſeyn. Geſetzt, es ſeye gegeben, daß ſich eine Zahl A zu einer andern Zahl B verhalte, gleich wie eine Linie C, zu einer andern Linie D, ſo wird man durch die Verwechslung gar nicht ſchlieſſen können, daß ſich die Zahl A zu der Linie C verhalte, gleich wie die Zahl B, zu der Linie D. Die Urſach iſt, weilen die Zahlen, und Linien keine Verhaltnuß, wie es in der 5. def. dieſes Buchs iſt erklärt worden, gegen einander haben können. In denen fünff folgenden Schluß-Redens-Arten aber, können die erſtere zwey Gröſſe von einerley Gattung, und die zwey andere Gröſſe, von einer andern Gattung ſeyn.

XIII.

Eine umbgekehrte Verhaltnuß (Inverſa ratio) iſt, wann man die Nachgehende, an ſtatt der Vorgehenden, und die Vorgehende an ſtatt der Nachgehenden nimmet.

Alſo, wann anfänglich die Proportion ſtehet.

A. B. : : C. D.
9. 3. : : 6. 2.

So wird ſeyn durch die Umbkehrung (Inversè, è contrario, oder invertendo).

B. A. : : D. C.
3. 9. : : 2. 6.

XIV.

Eine Zuſammenſetzung (Compoſitio rationis) iſt, wann man beyderſeits das Vorgehendt und Nachgehendt zuſammen nimmet und gegen das Nachgehendt allein vergleichet.

Wann anfänglich ſtehet A. B. : : C. D.
9. 3. : : 6. 2.

So wird ſeyn durch die Zuſammenſetzung (componendo)

A + B. B. : : C + D. D.
12 . 3 : : 8 . 2.

XV.

Eine Zertheilung der Verhaltnuß (Diviſio rationis) iſt, wann man den Unterſcheid, und welchen das Vorgehend ſein Nachgehend übertreffet, gegen der Nachgehenden vergleichet.

Wann anfänglich ſtehet: A. B. :: C. D.
9. 3. :: 6. 2.

So wird ſeyn durch die Zertheilung (dividendo).
A—B . B :: C—D . D
6 . 3 :: 4 . 2.

Mercke, daß in dieſer Schluß-Redens-Art das Vorgehende nothwendig gröſſer ſeyn muß, als ſein Nachgehendes.

XVI.

Eine Ver- oder Umbwendung der Verhaltnuß (Converſio rationis) iſt, wann man beyderſeits das Vorgehendt zu dem Unterſcheid, welcher zwiſchen einem Vorgehenden, und ſeinem Nachgehenden iſt, vergleichet.

Wann anfänglich ſtehet: A . B :: C . D.
9 . 3 :: 6 . 2.

So wird ſeyn durch die Umbwendung (per converſionem).
A . A—B :: C . C—D.
9 . 6 :: 6 . 4 .

Mercke, daß auch in dieſer Schluß-Redens-Art, das Vorgehende gröſſer ſeyn muß, als ſein Nachgehendes.

XVII.

Verhaltnuß auß einer Gleichheit, oder kurtz hinweg, auß der gleichen (ex Æqualitate ratio, oder ex æquo) iſt, wann man zwey Reühe Gröſſe eine jede in gleicher Anzahl, jederzeit zwey und zwey, in einerley Verhaltnus zuſammen nehmet; und hernach einen ſolchen Vergleichungs-Schluß machet, daß die erſte Gröſſe ſich zu der letzten in der erſten Reühe verhalte, gleich wie die erſte Gröſſe ſich zu der letzten in der andern Reühe verhalte.

Die Zuſammennemmung deren zwey Gröſſe, geſchicht auff zweyerley Weiſe; erſtlich wann ſie ordentlich, hernach verrückter genommen werden.

XVIII.

Eine ordentliche Proportion iſt (ordinata proportio), wann zwey Reühe Gröſſe, eine jede in gleicher Anzahl auff ſolche Weiſe genommen werden, daß in der erſten Reühe die erſte Gröſſe, ſich zu ſeiner anderten verhalte, gleich wie die erſte Gröſſe in der anderten Reühe,

zu ſeiner anderten. Und wiederum gleich wie die anderte Gröſſe in der erſten Reühe ſich zu ſeiner dritten verhalte: alſo auch die anderte Gröſſe in der anderten Reühe ſich zu ſeiner dritten verhalte. u. ſ. f.

Zu einem Exempel, es ſtehen die Gröſſe,

In der erſten Reyhe		In der anderten Reühe	
A	9	D	18
B	3	E	6
C	1	F	2

Wann ſich nun verhaltet A zu B :: D, E, und B C :: E, F.
So ſchlieſſet man hernach, daß auch ſeye durch die Verhaltnuß auß einer Gleichheit, oder kurtz hinweg auß der gleichen.

A . C :: D . F.
9 . 1 :: 18 . 2.

XIX.

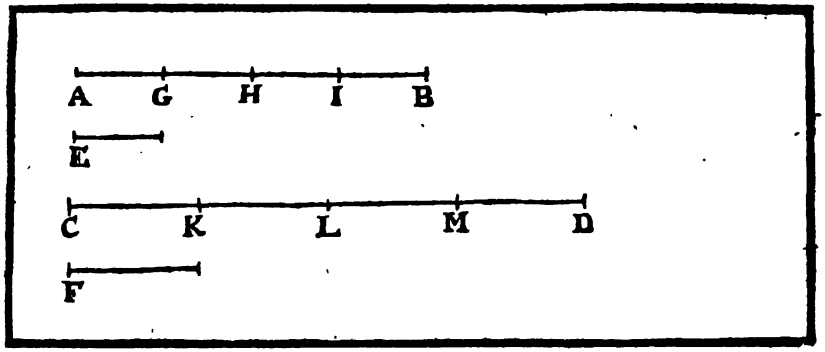
Eine verruckte Proportion iſt (perturbata proportio), wann zwey Reühe Gröſſe eine jede in gleicher Anzahl auff ſolche Weiſe genommen werden; daß in der erſten Reühe die erſte Gröſſe ſich zu ſeiner anderten verhalte, gleichwie die vorletzte Gröſſe in der anderten Reühe ſich zu ſeiner letzten verhalte: Und wiederumb, gleich wie die andere Gröſſe in der erſten Reühe ſich zu ſeiner dritten verhalte, als wie die Vorletztere Gröſſe in der anderten Reühe ſich zu ſeiner Vor-letzteren verhalte. u. ſ. f.

Zu einem Exempel, es ſtehen die Gröſſe

In der erſten Reühe		In der anderten Reühe	
A	12	D	24
B	6	E	8
C	2	F	4

Wann ſich nun verhaltet A. B :: E F, und B. C :: D. E.
So ſchlieſſet man hernach, daß auch ſeye auß der gleichen

A . C :: D . F.
12 . 2 :: 24 . 4.



Die I. Vorgab. Betrachtung.

Wann ſo viel Gröſſe, (als man will,) gleichformig-vielfach ſeynd, ſo vieler andern Gröſſe, eine jede der Seinen: ſo wird ſeyn, als wie eine vielfache ſich zu ſeiner andern verhaltet, alſo werden ſie alle gleichförmig vielfache ſammentlich, zu ihren andern Gröſſen ſammentlich verhalten.

Es ſeynd gegeben die zwey Gröſſe AB, und CD, welche gleichformig vielfach ſeynd, deren Gröſſe E und F. Dieſem nach ſaget man, daß AB und AB + BD gleichförmig vielfache ſeynd, deren E und E + F; das iſt, wie offt AB ſeine andere Gröſſe E begreiffet, ſo offt, oder in gleicher Anzahl, werden AB und CD ſammentlich E und F ſammentlich begreiffen.

Zubereitung.

Weilen AB und CD gleichförmig vielfach ſeynd deren E und F — d. d. Vorg.
ſo kan AB in ſo viel Theil (alle gleich der Gröſſe E); — d. 2. an. 2. def. ſ.
als CD in ſolche Theile (welche alle gleich ſeynd der F) abgetheilt werden.

Geſetzt, es ſeye AB in vier gleiche Theile abgetheilt worden,
ſo wird auch CD gerad̃t vier gleiche Theile begreiffen. Dieſem nach

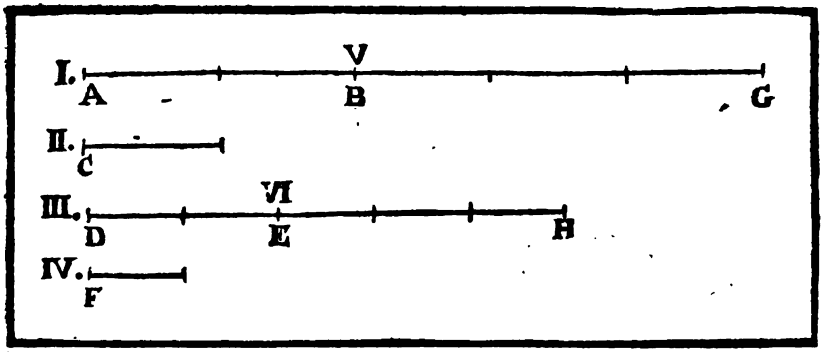
Beweiß.

Weilen nun AG ▭ iſt der E, — d. d. Zub.
ſo man beyderſeits hinzu ſetzet die CK, und F (welche auch einander ▭ ſeynd). — d. d. Zub.
So wird AG + CK ▭ ſeyn, E + F; und auff ſolche Weiſe — d. 2. ax.
auch GH + KL ▭, der E + F, und HI + LM ▭, der E + F.
Letztlich IB + MD ▭, der F + F.

Auß dieſen erhellet, wie offt dann F in AB, oder F in CD begriffen iſt,
ſo offt ſeye auch E + F in AB + CD begriffen.

Deßwegen, wie vielfach AB der Gröſſe E, iſt,
ſo gleichformig vielfach wird AB + CD ſeyn, der E + F. — d. 2. def. 2. an. ſ.

Welches zu beweiſen ware.



Die II. Vorgab.

Betrachtung.

Wann die erſte Gröſſe, ſo gleichformig vielfach iſt der anderten, als wie die dritte der vierten, und die fünffte auch gleichformig vielfach iſt der anderten, als wie die ſechſte, der vierten: ſo wird die erſte und fünffte zuſammen, ſo gleichförmig vielfach ſeyn der anderten: als wie die dritte und ſechſte zuſammen der vierten.

Es iſt gegeben die erſte Gröſſe AB, ſo gleichförmig vielfach der anderten C, als die dritte DE, der vierten F. Wiederumb ſeye gegeben die fünffte BG, ſo gleichförmig vielfach der anderten C; als die ſechſte EH, der vierten F. Dieſem nach ſagt man, daß AB ⊹ BG, und DE ⊹ EH, gleichformig vielfache ſeynd, deren C und F.

Beweiß.

Geſetzt, die erſte AB begreiffe die anderte C zweymahlen, ſo wird auch die dritte ED die vierdte F geradt zweymahlen begreiffen. d. 2. def. 2. an. ſ.

Seye wiederumb geſetzt, daß die fünffte BG die anderte C dreymahln begreiffe. So wird auch die ſechſte EH die vierte F geradt dreymahlen begreiffen.

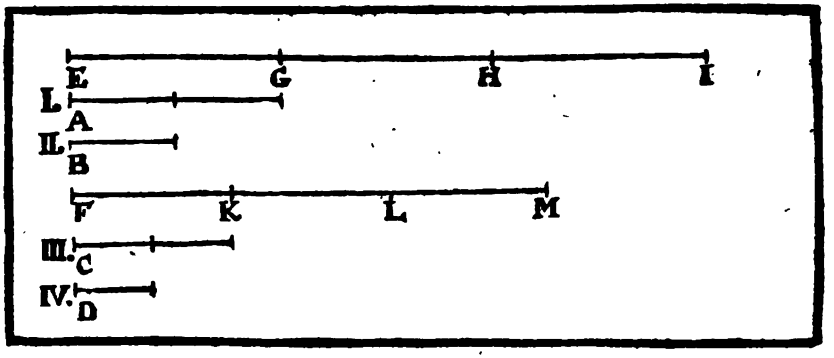
Wann man nun beyderſeits zu gleicher Anzahl eine andere gleiche Anzahl hinzu ſetzet.

So kommen wiederumb beyderſeits gleiche Anzahlen herauß. d. 2. ax. 1

Setze dahero zu AB, und DE die von gleicher Anzahl BG, und EH, ſo wird ſowohl die gantze AG fünffmahlen die Gröſſe C, als die gantze DH fünffmahlen die Gröſſe F begreiffen.

Deßwegen wird die gantze AG, ſo gleichformig vielfach der anderten C ſeyn; als die ganze DH, der vierten F. d. 2. def. 2. an. ſ.

Welches zu beweiſen ware.



Die III. Vorgab. Betrachtung.

Wann die erſte Gröſſe ſo gleichförmig vielfach iſt der anderten, gleichwie die dritte der vierten; Man nemmet aber noch andere gleichförmig-vielfache der erſten und dritten: ſo wird die genommene gleichförmig vielfache der erſten, ſo offt gleichförmig-vielfach ſeyn der anderten, als die genommene gleichförmig-vielfache der dritten, gleichförmig vielfach iſt der vierten.

Es ſeynd gegeben, die erſte Gröſſe A, ſo gleichförmig vielfach der anderten B, als die dritte C, der vierdten D. Man nemme auch die Gröſſe EI, und FM, gleichformig vielfach der erſten A, und C. Dieſem nach ſaget man, daß EI, und FM gleichförmig vielfache deren B und D ſeynd.

Zubereitung.

Geſetzt, EI ſey abgetheilt in drey gleche Theile, deren ein jeder gleich iſt der Gröſſe A, nemlich in EG, GH, und HI und FM ſeye auch abgetheilt in drey gleiche Thile, deren ein jeder gleich iſt, der Gröſſe C, nemlich in FK, KL, und LM.

Beweiß. Weilen EG ▭ iſt der A; und FK ▭, der C. d. d. Zuſ.
ſo werden EG, und FK, ſo offt B und D begreiffen, als A, und C.
Eben wird diß geſchehen von denen Theilen GH, und KL, u. ſ. f.

Jnsdeme nun die erſte Gröſſe EG, ſo offt vielfach iſt der anderten B, als die dritte FK vielfach iſt, der vierdten D.

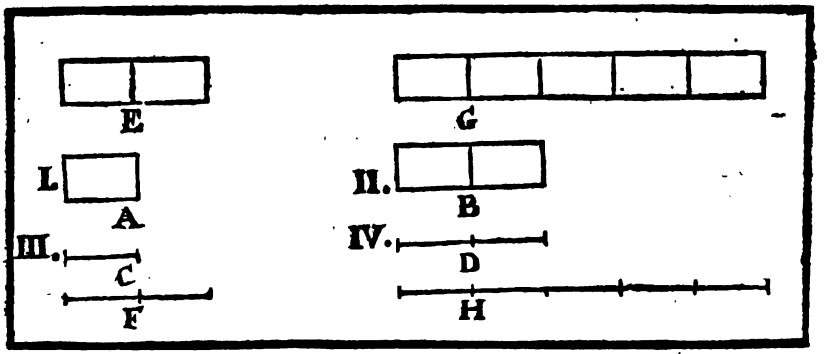
Und die fünffte GH iſt auch ſo offt vielfach der anderten B, als die Sechſte KL vielfach iſt der vierdten D.

So wird auch die Gröſſe EH zuſammengeſetzter von der erſten und fünfften, und die Gröſſe FL, (ſo zuſammen geſetzt iſt von der dritten und ſechſten) gleichförmig vielfach ſeyn der anderten B und vierten D. d. 2. ſ.

Unterdeſſen, wann man EH, und FL für die erſte und dritte Gröſſe nehmet, und HI, und LM für die fünffte und ſechſte.

So ſchlieſſet man, daß die gantze EI, und FM gleichförmig vielfache ſeint deren B und D. {d. 2 def. 2. am ſ. und 2. ſ.

Welches zu beweiſen ware.



Die IV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann vier Gröſſen geproportionirt ſeynd, und man nehme nach Gefallen gleichformig vielfache der erſten und dritten, gleichwie auch gleichförmig vielfache der anderten und vierten: ſo werden auch die nach Gefallen genommene Vielfache (wann nur die Ordnung gehalten wird) einander geproportionirt ſeyn.

Es ſeynd gegeben die vier geproportionirte Gröſſen, nemlich A. B :: C D. Man nehme nun nach Gefallen die Gröſſe E und F gleichförmig vielfach der erſten A, und dritten C. auch die Gröſſe G, und H gleichförmig vielfach der anderten B, und vierdten D. dieſen nach ſaget man, daß auch die genommene vielfache einander geproportionirt ſeynd, nemlich E. G :: F. H.

Beweiß.

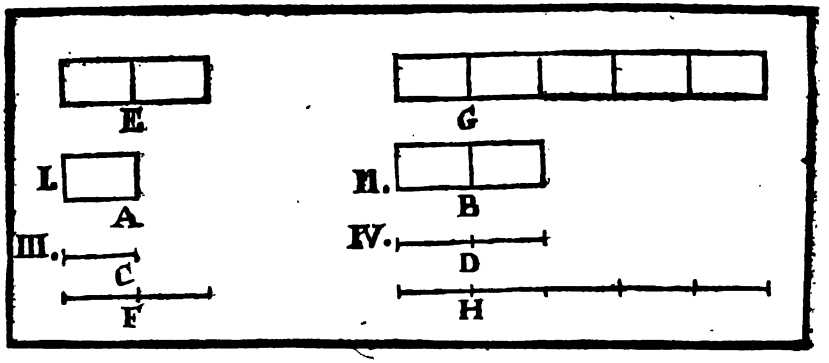
Weilen E, und F gleichförmig vielfache ſeynd, denen A, und C, ſo wird die Anzahl deren Theile in E ⌐ ſeyn, der Anzahl deren Theile in F. d. 2. an. def. 2. ſ.

Auff ſolche Weiſe wird auch die Anzahl deren Theile in G ⌐ ſeyn, der Anzahl deren Theile in H.

Dahero wegen Gleichheit der Anzahle beyderſeits wird E ſo offt die G begreiffen, als F die H begreiffet; oder E iſt ſo offt von G; als F und H begriffen: und alſo haben ſie einerley Verhaltnuß untereinander d. 6. def. ſ.

Deßwegen ſeynd dieſe vier vielfache einander geproportionirt, d. 7. def. ſ.
Das iſt, es werde ſeyn E. G :: F. H.

Welches zu beweiſen ware.

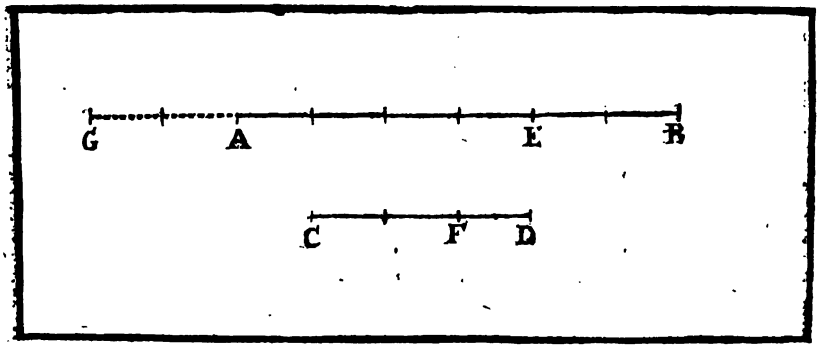


Anmerckung.

Man beweiſet gemeiniglich zu Folge dieſer Vorgab, die Giltigkeit der Umbkehrung dieſer Verhaltnuß, (welche in der 13. def. dieſes Buchs iſt erkläret worden) ſo wir auch allhier thun wollen; weilen aber dieſe vierte Vorgab durch eine andere Art, als Euclides gethan, bewieſen worden iſt: alſo iſt dieſe nicht zu einer Folge, ſondern für eine Haubt-Vorgab beygeſetzt worden.

Seye dahero anfänglich gegeben A. B :: C. D.
So ſaget man, daß auch durch die Umbkehrung (invertendo, oder inversè) giltig kan geſchloſſen werden B. A :: D. C.
Dann weilen geſetzt iſt A. B :: C. D
ſo wird A ſo offt begreiffen B, als C, die D: oder A wird ſo offt begriffen ſeyn von B; als C von D. 5. def. 6. 5.
Dahero ſo wohl A, und C; als B, und D gleichförmige Theile ihrer Gröſſe ſeyn können, und B ſo viel zu A, als D zu C iſt. 5. 2. an. def. 2. 5.
Deßwegen B ſo offt begreiffet A; als D, die C begreiffen kan; oder B ſo offt von A; als D von der C begriffen iſt.
Dahero werde es ſeyn B. A :: D. C. 5. def. 6. 5. def. 7.

Welches zu beweiſen ware.



Die V. Borgab.

Betrachtung.

Wann eine Gröſſe ſo vielfach iſt einer andern Gröſſe, als ein darvon abgezogener Theil, deß andern darvon abgezogenen Theils: ſo wird auch der eine übrige Theil ſo vielfach ſeyn, deß andern übrigen Theils, als wie die eine gantze Gröſſe, der andern gantzen Gröſſe ware.

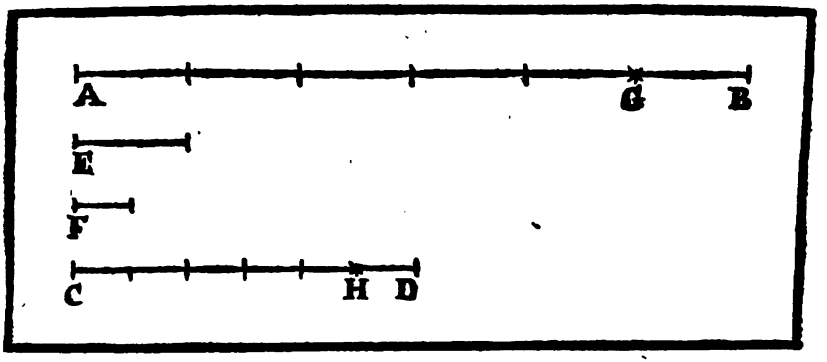
Es ſeynd gegeben die Gröſſe AB, ſo vielfach der andern CD, als der abgezogene Theil AE, deß andern abgezogenen Theils CF. Dieſem nach ſagt man, daß auch der übrige Theil EB, ſo vielfach iſt deß anderten übrigen Theils FD, gleich wie die gantze AB, der gantzen CD ware.

Zubereitung.

Setze, daß GA ſo vielfach der Gröſſe FD ſeye, als AE der Gröſſe CF. oder, als AB der Gröſſe CD iſt.

Beweiß.

Nun iſt GE ſo vielfach der Gröſſe CD, als AE der CF. d. 1. ſ.
Es iſt auch AB ſo vielfach der CD, als AE der CF. d. d. Borg.
Dahero wird GE ſo vielfach ſeyn der CD, als AB der CD,
und folgends GE ⌐ ſeyn, der AB (dann ſie gleichförmig vielfache von einerley Gröſſe CD ſeynd). [d. 6. ax. 1. und 2. def. 2. ſ.
Wenn man nun beyderſeits die gemeine Gröſſe AE darvon ziehet,
ſo wird GA ⌐ verbleiben, der EB. d. 3. ax 1.
Unterdeſſen iſt GA ſo vielfach, der FD gemacht, als AB der CD. d. d. Zuß.
Folget, daß auch EB ſo vielfach ſeye der FD, als AB der CD.
Welches zu beweiſen ware.



Die VI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwey Gröſſe, anderer zwey Gröſſen gleichförmig vielfach ſeint, und man von dieſen auch gleichförmig vielfache darvon nemmet: ſo werden auch die übrige entweder denen andern gleichförmig vielfache, oder gleich groß verbleiben.

Es ſeynd gegeben die Gröſſe AB, und CD gleichförmig vielfache deren E und F; und man hat darvon genommen AG, und CH, gleichförmig vielfache, derenſelben E, und F. Dieſem nach ſaget man, daß die übrige Gröſſe GB, und HD entweder gleichförmig vielfach deren E, und F, oder denenſelben gleich groß verblieben ſeynd.

Beweiß.

Die Gröſſe AB, und CD ſeynd gleichförmig vielfach deren E, und F. d. d. Vorg.

Dahero in AB ſo viel Theile (deren ein jeder gleich iſt der E) ſeint, d. 2. an. def. 2. f.
als Theile ſeint in CD (deren ein jeder gleich iſt der F).

Es ſeint auch genommen AG, und CH gleichförmig vielfache deren E, und F. d. d. Vorg.

Dahero werden auch in AG ſo viel Theile (deren ein jeder gleich iſt der E) ſeyn, d. 2. an. def. 2. f.
als Theile ſeyn in CH (deren ein jeder gleich iſt der F).

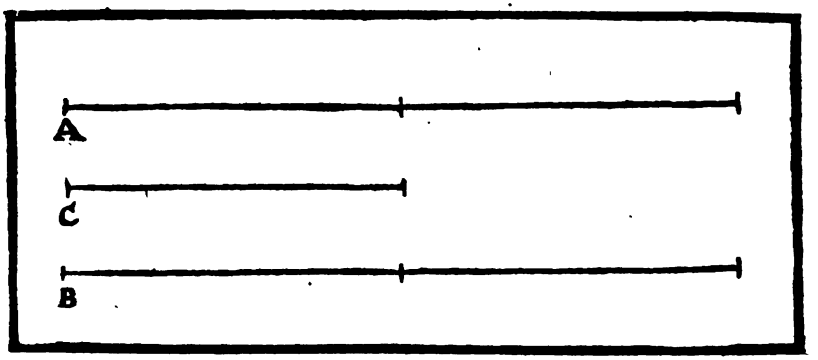
Wann man nun von dergleichen Anzahl deren gleichen Theile (ſo in AB, und CD ſeint)
die gleiche Anzahl deren gleichen Theile, ſo in AG, und CH ſeint), abziehet

So werden in GB ſo viel Theile ⊓, der E verbleiben, als Theile d. 3. ax. 1.
in HD ⊓, der F ſeint.

Wann nun GB ⊓ iſt, der E:
So wird auch HD ⊓ ſeyn, der F.

Seint dann mehr Theile in GB, und HD,
ſo iſt klar, daß GB und HD auch gleichförmig vielfache ſeint deren E und F.

Welches zu beweiſen ware.



Die VII. Vorgab.

Betrachtung.

Gleiche Gröſſen, welche zu einer andern Gröſſe verglichen werden, haben zu ihr einerley Verhaltnuß: und hinwiederumb eine Gröſſe zu andern gleichen Gröſſe verglichener, hat einerley Verhaltnuß zu ihnen.

Es ſeynd gegeben die Gröſſe A, und B, ſo einander gleich ſeynd, wann man dieſe zu der gegebenen Gröſſe C vergleichet: So ſaget man, daß beyde Gröſſen A, und B einerley Verhaltnuß zu der C haben, nemlich es ſey A. C:: B. C.

Beweiß.

I.

Weilen A ⌐ iſt gegeben, der B,
ſo wird A ſo offt C begreiffen, als B dieſelbe C: oder
A wird ſo offt ein gleicht Theil von C. ſeyn, als B von der C.
ein ſolcher Theil iſt.

Dahero iſt auch die Verhaltnuß A zu C ⌐, der Verhaltnuß B zu C. d.6.def.5.
und folgends ſeyn werde: A. C.:: B. C. d.7.def.5.

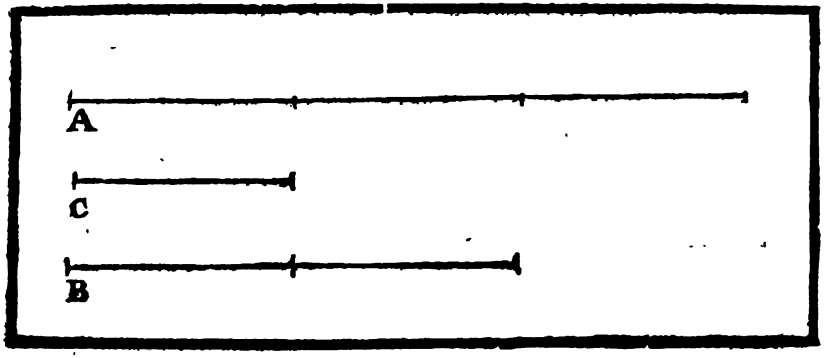
II.

Wann nun die C zu denen gleichen Gröſſen A, und B verglichen wird, ſo ſaget man, daß die Gröſſe C zu dieſen beyden einerley Verhaltnuß habe.

Die Urſach iſt, weilen vorgehends iſt bewieſen worden, daß es ſeye A. C:: B. C. ſo iſt auch durch die Umbkehrung giltig zu ſagen: C. A:: CB. d.an.4.5.

Das iſt, die Verhaltnuß C zu A iſt ⌐ der Verhaltnuß C zu B.
Welches zu beweiſen ware.

Mercke, daß dieſe, und die vier folgende Vorgaben pure allgemeine Wiſſenſchafften ſeynd.



Die VIII. Vorgab.

Betrachtung.

Unter zweyen ungleichen Gröſſen, welche zu einerley Gröſſe gehalten werden, hat die Gröſſere eine gröſſere Verhaltnuß zu derſelben, als die kleinere: hinwiederumb wird dieſelbe Gröſſe zu der kleinern eine gröſſere Verhaltnuß haben, als zu der gröſſern.

Es ſeynd gegeben die zwey ungleiche Gröſſe A und B, welche zu der gegebenen Gröſſe C verglichen werden. Dieſem nach ſaget man, daß die gröſſere A zu der Gröſſe C eine gröſſere Verhaltnuß habe, als die kleinere B zu derſelben C.

Beweiß.

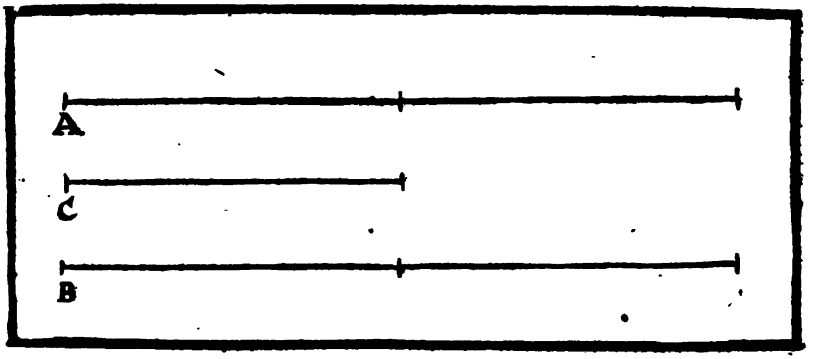
I. ſc

Weilen A ⌜ gegeben iſt, als B;
ſo wird A offter begreiffen C, als B dieſelbe C:
Dahero wird A zu C auch eine gröſſere Verhaltnuß haben,
als B zu derſelben C d. 8. def. 5.

II.

Geſtalt dieſer Sachen, wann nun die Gröſſe C zu denen zwey ungleichen Gröſſen A und B verglichen wird, ſo ſaget man, daß C zu der kleinern B eine gröſſere Verhaltnuß habe, als zu der gröſſern A:
Dann C ein gröſſerer Theil von ſeinem Nachgehenden, der kleinern B, als dieſelbe C von ſeinem Nachgehenden, der gröſſern A iſt.
Dahero auch C eine gröſſere Verhaltnuß hat zu der kleinern B. d. 8. def. 5.
als zu der gröſſern A.

Welches zu beweiſen ware.



Die IX. Vorgab.

Betrachtung.

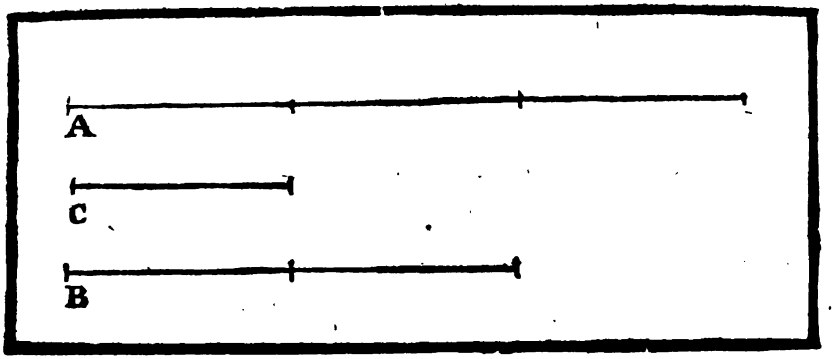
Die Gröſſen, welche zu einer andern Gröſſe einerley Verhaltnuß haben, ſeint einander gleich groß: und wann eine Gröſſe zur andern Gröſſe einerley Verhaltnuß hat, ſo ſeynd dieſelbe auch einander gleich groß.

Es iſt gegeben, daß die zwey Gröſſe A und B einerley Verhaltnuß haben zu C. Dieſem nach ſaget man, daß A ⌐¬ ſeye, der B.

Beweiß.

Geſetzt, man ſagete, es wäre A nicht ⌐¬ der B, ſondern
A ſeye entweder ⌐, oder ¬, als die B.
So folgete aber darauff, daß auch die Verhaltnuß A zu C
entweder ⌐ oder ¬ wäre, als die Verhaltnuß B zu C. 9. §. 5.
Dieſes aber ſtreitet wieder die Vorgab, indeme beyde
Verhaltnuſſe anfänglich gleich einander ſeint gegeben worden.
Darumb iſt noch wahr zu ſagen, daß A ⌐¬ ſeye der B.
Es ſeye abermahlen gegeben, daß die Gröſſe C zu denen gegebenen Gröſſen
A und B einerley Verhaltnuß habe. Dieſem nach ſaget man, daß
A ⌐¬ ſeye, der B.
Dann weilen C zu A, und B einerley Verhaltnuß hat,
ſo muß auch nothwendig A ⌐¬ ſeyn, der B.
Sonſten, wann A und B nicht einander gleich wären,
auch die Verhaltnuſſe zu der C einander ungleich wären, 8. 8. §.
welches aber wieder die Vorgab ſtreitet.
Dahero ſchlieſſet man, daß nothwendig A ⌐¬ ſeye, der B.

Welches zu beweiſen ware.



Die X. Vorgab.

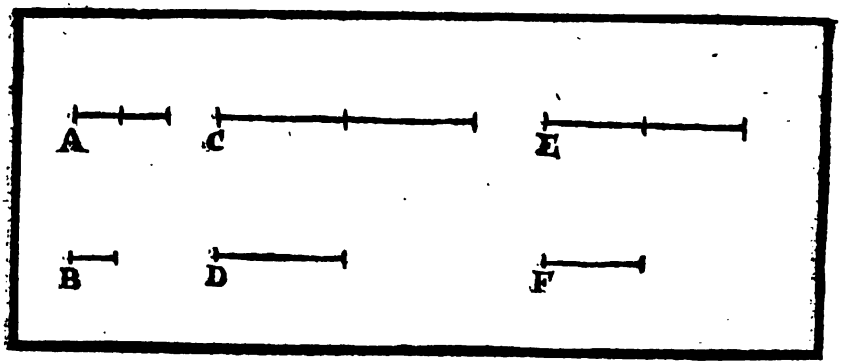
Betrachtung.

Wann zwey Gröſſe zu einer andern Gröſſe gehalten werden, ſo iſt unter ſolchen die gröſſere, welche eine gröſſere Verhaltnuß zu derſelben andern hat; gegen welchen aber dieſelbe eine gröſſere Verhaltnuß hat, die iſt kleiner.

Es ſeye gegeben, daß die Verhaltnuß der Gröſſe A zu der Gröſſe C ⌜ ſeye, als die Verhaltnuß B zu derſelben C. ſo ſagt man, daß auch A ⌜ ſeye, als B.

Beweiß.

Geſtehet man es nicht, ſondern ſaget, daß A ⌐ wäre, der B.
So folgete darauff, daß auch die Verhaltnuß A zu C ⌐ wäre, der Verhaltnuß B zu C. Welches aber wider die Vorgab iſt. d. 7. f.
Wil man weiter ſagen, daß A ⌝ ſeye, als B.
ſo folgete auch, daß die Verhaltnuß A zu C ⌝ wäre, als die Verhaltnuß B zu C, welches eben wider die Vorgab iſt. d. 8. f.
Dahero ſchlieſſet man, daß nothwendig A ⌜ ſeyn muß, als B.
Es iſt weiters gegeben, daß die Verhaltnuß C zu B ⌜ ſeye, als die Verhaltnuß C zu A, ſo ſaget man, daß B kleiner ſeye, als A.
Dann wann man ſagete, daß B ⌐ wäre der A.
ſo folgete, daß die Verhaltnuß C zu B auch ⌐ wäre, der Verhaltnuß C zu A, welches wider die Vorgab iſt. d. 7. f.
Wil man aber ſagen, daß B ⌜ ſeye, als A:
ſo folget, daß die Verhaltnuß C zu A ⌜ wäre, als die Verhaltnuß C zu B. welches eben wider die Vorgab iſt. d. 8. f.
Dahero iſt unfehlbar zu ſagen, daß B ⌝ ſeye, als A.
Welches zu beweiſen ware.



Die XI. Vorgab.

Betrachtung.

Die Gröſſen, welche gegen einer andern einerley Verhaltnuß haben, haben auch unter ſich einerley Verhaltnuß.

Es ſeynd gegeben die Gröſſen AB EF. CD, und A verhalte ſich zu B, als wie E zu F. und auch C verhalte ſich zu D, gleich wie dieſelbe E zu F. u. ſ. f. dieſen nach ſaget man, daß es ſeyn werde A. B :: C. D.

Beweiß.

Weilen die Verhaltnuß A zu B ▭ iſt, der Verhaltnuß E zu F. — d. d. Vorg.
ſo wird A ſo offt B begreiffen, als E die F. oder,
A wird ſo offt von B begriffen, als E von F.

Es iſt aber gegeben die Verhaltnuß C zu D ▭, der Verhaltnuß E zu F.
ſo wird auch C ſo offt D begreiffen, als E die F, oder,
C wird ſo offt von D begriffen ſeyn, als E von F.

Dahero wird auch A ſo offt B begreiffen, als C die D, oder — d. 1. ax. 1.
A wird ſo offt von B begriffen, als C von D.

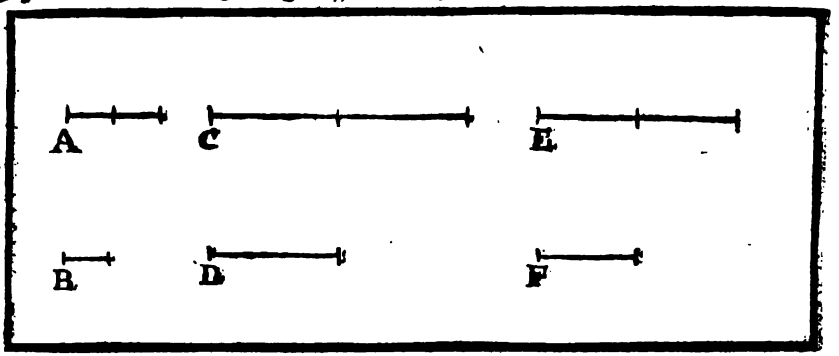
Worauff folget, daß dann ſeye A. B :: C. D. — d. 6. def. ſ.
Welches zu beweiſen ware. — d. 7. def. ſ.

Anmerckung.

Die Gröſſe, welche gegen andern Gröſſen einerley Verhaltnus haben, haben auch unter ſich einerley Verhaltnus

A	2.	B	1. ::	C	6.	D. 3.
E	8	F	4. ::	G	12.	H. 6.

Wann es iſt A. B :: C. D, und E. F :: A. B, und G. H :: C. D ſo ſaget man, daß auch ſeye E. F. :: G. H; dann weilen die Verhaltnuſſe E zu F, und C zu D ▭ ſeint der Verhaltnuß A zu B: ſo wird durch die 11. ſ. ſeyn EF :: C. D und wiederum indeme die Verhaltnuſſe E zu F, und G zu H ▭ ſeint, der Verhaltnuß C zu D; ſo wird auch durch dieſelbe 11. ſ ſeyn, E. F :: G. H.



Die XII. Vorgab. Betrachtung.

Wann ſo viel Gröſſe ſeint, als man wil, welche einerley Verhaltnus gegen andere Gröſſe haben: ſo wird ſeyn, gleich wie ſich ein vorgehend zu ſeinem Nachgehenden verhaltet; alſo werden alle Vorgehende zuſammen genommen, ſich zu allen Nachgehenden zuſammen genommen verhalten.

Es ſeynd gegeben die Gröſſe A. C. E. welche einerley Verhaltnuß haben, zu denen Gröſſen B. D. F. das iſt, A. B. :: C. D. :: E. F. Dieſem nach ſaget man, daß auch ſeyn werde, gleich wie ein vorgehendes A ſich zu ſeinem nachgehenden B verhaltet: Alſo werden alle Vorgehende A. C. E ſammentlich, ſich zu allen Nachgehenden B D. F ſammentlich verhalten, das iſt, es werde ſeyn A. B :: A + C + E. B + D + F.

Beweiß. Dieweilen die Gröſſe A. C. E einerley Verhaltnuß zu ihren Nachgehenden B. D. F haben.

So werden ſie ihre Nachgehende in gleicher Anzahl begreiffen, nemlich ein jede das Seine: oder, ſo werden ſie von ihren Nachgehenden in gleicher Anzahl begriffen werden, nemlich eine jede von dem Seinen. d. 6. def. 5.

Geſetzt, es ſeye ein Vorgehendes, gleich wie A, doppelt, oder dreyfach ſeines Nachgehenden B.

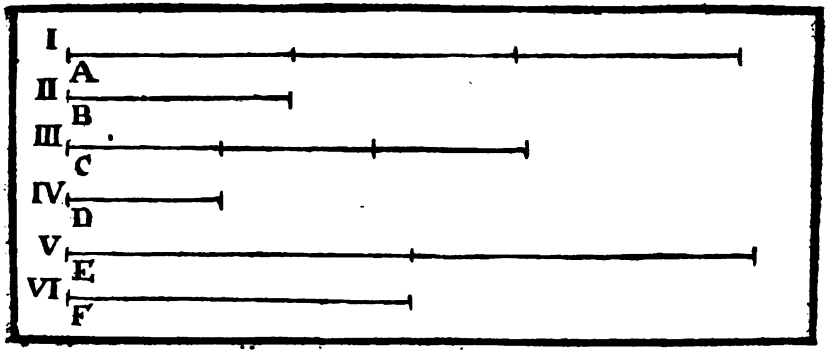
So folget, daß auch die andere C und E, doppelt, oder dreyfach ſeyn werden ihrer Nachgehenden D und F.

Auff ſolche Weiſe, weilen dann beyderſeits gleichförmige Gröſſen zuſammen genommen werden: nun klar iſt, daß die gantze Summe deren Vorgehenden auch doppelt oder dreyfach, der gantzen Summen deren Nachgehenden ſeyn werde, gleich wie das eine vorgehend A doppelt oder dreyfach geſetzt ware ſeines Nachgehenden B (dann beyderſeits eine gleichförmige Zuſammenſetzung geſchiehet).

Und dahero die gantze Summen deren vorgehenden ſo offt die gantze Summen deren nachgehenden begreiffen werde, oder die gantze Summen deren vorgehenden, ſo offt von der gantzen Summen deren Nachgehenden begriffen ſeyn wird, wie offt ein vorgehendes, ſein Nachgehendes begreiffet, oder ein Vorgehendes von ſeinem Nachgehenden begriffen iſt.

Deßwegen wird ſeyn A. B :: A + C + E. B + D + F. Welches zu beweiſen ware. d. 6. def. 5. 7. def. 5.

Folge. Wann man gleichförmige geproportionirte Gröſſen zu gleichförmigen geproportionirten Gröſſen hinzu ſetzet, ſo wird auch die Summa gleichförmig geproportionirt ſeyn.



Die XIII. Vorgab.

Betrachtung.

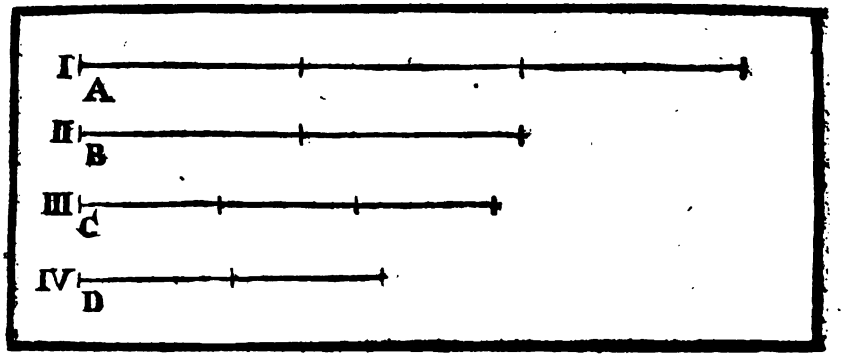
Wann die erſte Gröſſe zu der anderten eine ſolche Verhaltnuß hat, als wie die dritte zu der vierten. Die dritte aber zu der vierdten eine gröſſere Verhaltnuß hat, als die fünffte zu der ſechſten: ſo wird auch die erſte Gröſſe, zu der anderten eine gröſſere Verhaltnuß haben, als die fünffte zu der ſechſten.

Es iſt gegeben, daß die Verhaltnuß der erſten Gröſſe A zu der anderten B ⌐ ſeye, der Verhaltnuß der dritten C zu der vierdten D. Die Verhaltnuß der dritten C zu der vierten D aber, iſt Γ gegeben, als die Verhaltnuß der fünfften E zu der ſechſten F. Dieſem nach ſaget man, daß auch die Verhaltnuß der erſten A zu der anderten B Γ ſeye, als die Verhaltnuß der fünfften E zu der ſechſten F.

Beweiß.

Die Verhaltnuß C zu D iſt Γ gegeben, als die Verhaltnuß E zu der F. d. d. Vorg.
Dahero C öffter begreiffen werde die D, als E die F. d. 8. def. 5.
Es iſt unterdeſſen C. D :: A. B. oder C D ⌐, A B. d. d. Vorg.
Folget, daß auch A öffter begreiffen werde die B, als E die F.
Unterdeſſen wird A zu B auch eine gröſſere Verhaltnuß haben, als E zu F. d. 8. def. 5.

Welches zu beweiſen ware.



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann die erſte Gröſſe zu der anderten ſich verhaltet, als wie die dritte zu der vierten: wann nun die erſte Gröſſe gröſſer, kleiner oder gleich iſt der dritten: ſo wird auch die anderte Gröſſe gröſſer, kleiner, oder gleich ſeyn der vierten.

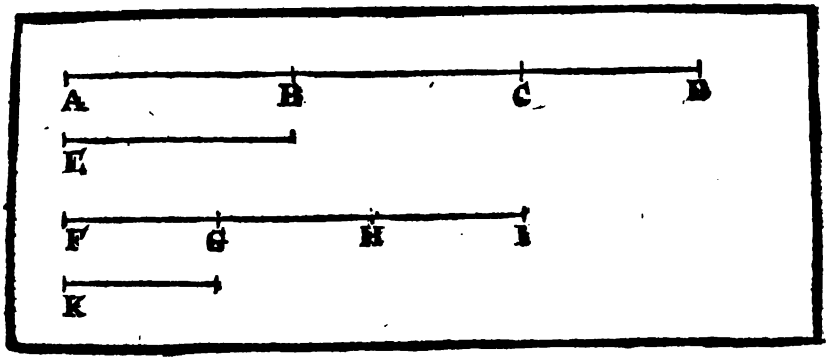
Es ſeye gegeben, daß ſich verhalte A. B :: C. D dieſen nach ſaget man: Wann die erſte A ⌜, ⌝, oder ▭ iſt, der dritten C. ſo werde auch die anderte B ⌜, ⌝ oder ▭ ſeyn der vierdten D.

Beweiß.

Seye erſtlich geſetzt, daß A ⌜ ſeye, als C.
ſo ſaget man, daß auch B ⌜ ſeye als D.
Dann, weilen A ⌜ iſt, als C.
ſo wird die Verhaltnuß A zu B ⌜ ſeyn, als die Verhaltnuß C zu B. d. 8. def. 5.
Unterdeſſen iſt die Verhaltnuß A zu B ▭ der Verhaltnuß C zu D. d. d. Vor.
Daher werde auch die Verhaltnuß C zu D ⌜ ſeyn, als
die Verhaltnuß C zu B.
Und deßwegen wird D ⌝ ſeyn, als B; oder (ſo ein Ding) B iſt ⌜, als D. d. 10. 5.

Welches zu beweiſen ware.

Eben auff ſolche Art ſolte bewieſen werden, daß, wann die Gröſſe A ⌝, oder ▭ gegeben würde der C, auch B ⌝ oder ▭ ſeyn ſolte, der D.



Die XV. Vorgab.

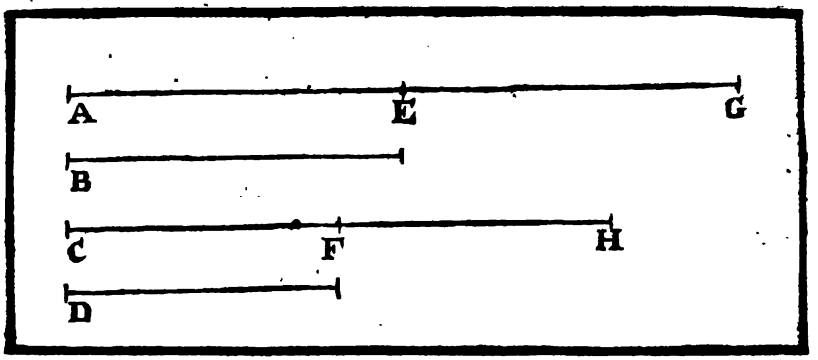
Betrachtung.

Die Theile halten ſich gegen einander, gleichwie ihre gleichförmige vielfache, wann ſie nur rechtmäſſiger Weiſe gegen einander gehalten werden.

Es ſeynd gegeben die Theile E, und K deren gleichförmig vielfachen Gröſſen AD, und FI.
Dieſem nach ſagt man, daß es ſeye E.K :: AD. FI.

Beweiß.

Dieweilen AD, und FI gleichförmig vielfache ſeynt deren Theile E, und L. — 5. d. Vorg.
ſo wird AD ſo offt begriffen E, als FI die K. — 5. 2. an. def. 2. f.
Dahero iſt AB. FG :: E.K, dann AB [] iſt E, und FG [] iſt, K. — d. 7. f.
Auff ſolche Weiſe wird auch ſeyn BC. GH, und CD. HI :: E.K.
Und deßwegen haben AB. BC. CD zu FG. GH. HI einerley Verhaltnuß unter ſich. — 5. 12. f.
Folgends ſchlieſſet man, daß ſich alsdann verhalte AB zu FG (das iſt, E zu K.) gleich wie AD ſich verhalte zu FI. — 5. 12. f.
Nemlich, als wie ein Vorgehendt zu ſeinem Nachgehenden ſich verhaltet, alſo werden alle vorgehende ſammentlich ſich zu allen Nachgehenden verhalten.
Dahero halten ſich die Theile gegen einander, gleich wie ihre gleichförmig vielfache.
Welches zu beweiſen ware.



Die XVI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann vier Gröſſen geproportionirt ſeynd; ſo werden ſie auch durch die Verwechslung geporportionirt verbleiben.

Es iſt gegeben, daß ſich verhalte AG. B :: CH. D. Dieſem nach ſaget man, daß durch die Verwechslung ſeyn werde, AG. CH :: B. D

Beweiß.

Geſetzt, daß die Nachgehende B, und D ⌐ ſeint, ihren vorgehenden AG, und CH.

So iſt klar, daß ein Ding ſeye, AG. CH :: B. D.
oder AG. B :: CH. D (dann wegen Gleichheit der Gröſſen, auch die Verhaltnuſſe einander gleich ſeynd), d. 7. 5.

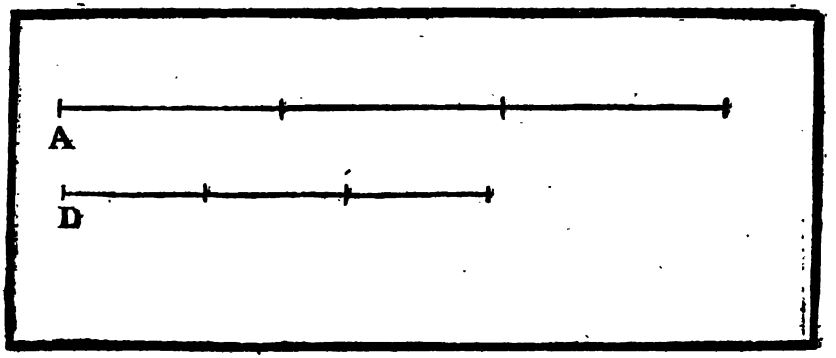
Setze man jetzund, daß B, und D kleiner ſeynd, als AG, und CH.

Alsdann geſchicht (weilen gegeben iſt AG. B :: CH. D) d. d. Vorg.
daß B und D gleichförmige Theile ihrer gantzen AG, und CH ſeint. d. 6. def 5.
und dahero ſich verhalte AG, CH :: B. D. d. 15. 5.

Werden letztlich AG und CH kleiner geſetzt, als B und D:

So folget abermahlen, weilen es iſt AG. B :: CH. D) d. d. Vorg.
daß AG und CH gleichförmige Theile ihrer gantzen B und D ſeint.
und dahero ſich verhalten AG. CH :: B. D. d. 15. 5.

Welches zu beweiſen ware.



Die XVII. Vorgab.

Betrachtung.

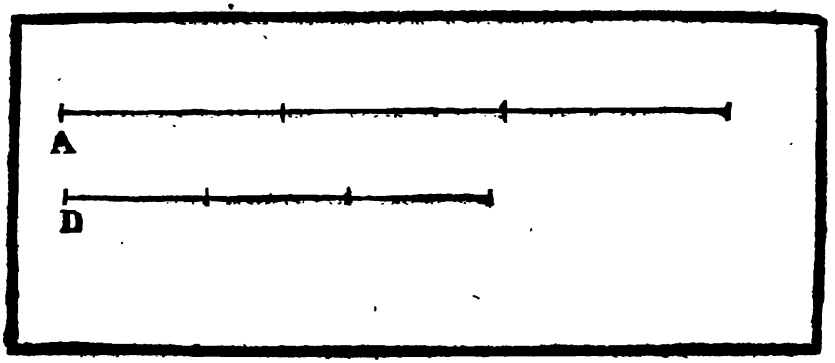
Wann zuſammengeſetzte Gröſſe geproportionirt ſeint: ſo werden ſie auch vertheilter geproportionirt ſeyn.

Es iſt gegeben AC + CB. CB :: DE + EF. EF, dieſem nach ſaget man, daß ſie auch durch die Vertheilung geproportionirt ſeynd, nemlich AC. CB :: DE. EF.

Beweiß.

Dieweilen gegeben iſt AC + CB. CB :: DE + EF. EF.
ſo wird die gantze AB ſoffte begreiffen CB, als DF begreifft EF. d. 6. def. 5.
Seye hier geſetzt dreymahlen.
Wann unterdeſſen beyderſeits die gleiche Anzahle CB. und FE von ihren gantzen AB, und DE abgezogen werden.
So wird überbleiben die Gröſſe AC ⌐ in der Anzahl der Gröſſe DE, nemlich beyderſeits zwey Theile.
Dahero wird auch AC ſo offt begreiffen CB, als DE begreiffet EF. und
folgendt ſeyn. AC CB :: DE. EF. d. 6. def. 5. d. 7. def. 5.

Welches zu beweiſen ware.



Die XVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zertheilte Gröſſe geproportionirt ſeynd: ſo werden ſie auch zuſammen geſetzter geproportioniret ſeyn.

Es iſt gegeben AB. BC :: DE. EF. Dieſem nach ſaget man, daß ſie auch durch die Zuſammenſetzung geproportionirt ſeynd, nemlich AB +. BC. BC :: DE +. EF. EF.

Beweiß.

Weilen ſich verhaltet AB. BC :: DE. EF.
ſo wird BC ſo offt begreiffen ſeyn von AB, als EF, von DE,
oder BC wird ſo offt AB begreiffen, als EF die DE. 9. 6. def. 5.

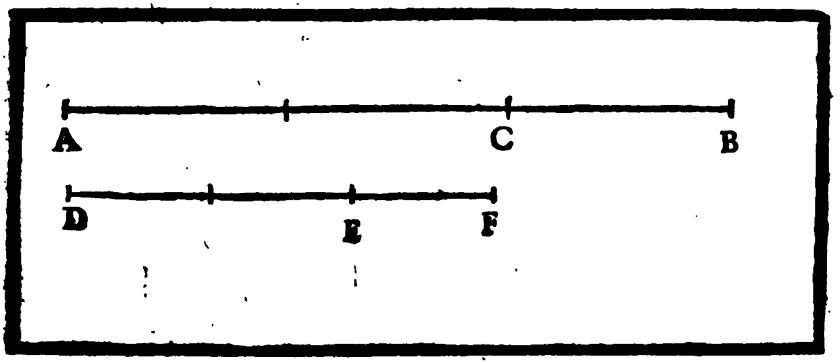
Geſetzt, es ſeye hier zweymahlen geſchehen.

Wann man nun zu gleicher Anzahl deren AB und DE,
(nemlich zu zwey gleichen Theilen) die gleiche Anzahl BC und EF,
(das iſt beyderſeits einen gleichen Theil) hinzu ſetzet.

So wird AB +. BC ⌐ an der Anzahl, der DE +. EF ſeyn.

Dahero wird AB +. BC ſo offt BC begreiffen, als DE +. EF
begreiffet den gleichformigen Theil EF. } 9. 6. def. 5.
Und deßwegen ſeyn AB +. BC. BC :: DE +. EF. EF. } 7. def 5.

Welches zu beweiſen ware.



Die XIX. Vorgab. Betrachtung.

Wann ein Ganzes zu einem andern ganzen ſich verhaltet, gleichwie das eine abgezogene Stück, zu dem andern abgezogenen Stück: ſo wird auch das eine übrige Stück, ſich zu dem andern übrigen Stück verhalten, gleich wie anfänglich das eine Gantze zu dem andern gantzen.

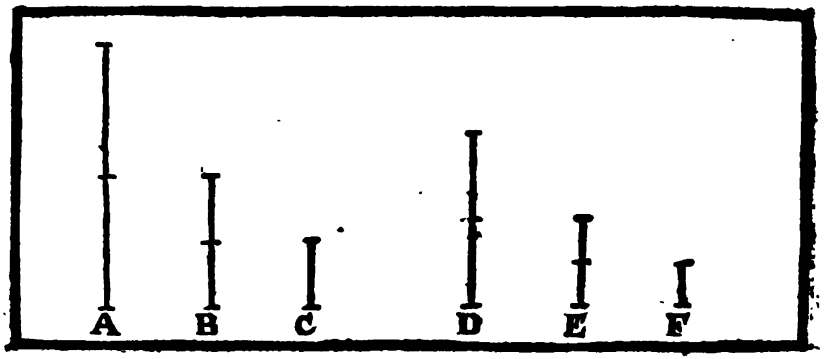
Es iſt gegeben, daß ſich das gantze AB zu dem andern gantzen DE verhalte, gleich wie das abgezogene Stück AC, ſich zu dem andern abgezogenen Stück DF verhaltet. Dieſem nach ſaget man, daß das übrige Stück CB ſich auch zu dem andern übrigen Stück FE verhalten werde, gleich wie das gantze AB ſich zu dem andern gantzen DE verhalte.

Beweiß.

Weilen es iſt AB. DE :: AC. DF.
ſo wird auch die Verwechslung ſeyn AB. AC :: DE. DF. — d. 16. ſ.
und durch die Zertheilung AC. CB :: DF. FE. (oder ſo ein Ding) CB AC :: FE DF — d. 17. ſ. u. 4. an. ſ.
Abermahlen durch die Verwechslung iſt CB. FE :: AC. DF.
Unterdeſſen aber iſt gegeben AC. DF :: AB. DE. — d. d. Vorg.
Dahero wird auch ſeyn CB. FE ∞ AB. DE.
Welches zu beweiſen ware.

Anmerckung.

Hiermit wird die Verwendung als giltig angewieſen,
Wann nemlichen anfänglich iſt AC. CB :: DE. FE.
ſo ſaget man, daß auch giltig ſeye, durch die Verwendung zu ſagen AB AC :: DE. DF.
Die Urſach, weilen gegeben iſt AB. CB :: DE. FE.
ſo wird durch die Zertheilung ſeyn AC. CB :: DF. FE. — d. 17. ſ.
und durch die Umbkehrung wird ſeyn CB. AC :: FE. DF. — d. 4. an. ſ.
Letztlich durch die Zuſammenſetzung AB. AC :: DE. DF. — d. 18. ſ.
das iſt in verwendter Verhaltnuß. — d. 16. def. ſ.
Welches zu beweiſen ware.



Die XX. Vorgab.

Betrachtung.

Wann drey Gröſſen ſeynd, und zu dieſen noch andere drey Gröſſen in ordentlicher Proportion darzu genommen werden, alſo, daß jederzeit zwey und zwey gegen einander gehaltene einerley Verhaltnuß haben: Wann nun die erſte Gröſſe gröſſer, kleiner, oder gleich iſt, der dritten; ſo wird auch die vierdte Gröſſe gröſſer, kleiner, oder gleich ſeyn der ſechſten.

Es iſt gegeben, daß die drey Gröſſen A B. C. gegen denen drey Gröſſen D. E. F. in ordentlicher Proportion ſtehen, nemlich daß es ſeye A. B. :: D. E, und B. C :: E. F. dieſem nach ſaget man, daß

Wann A ⌜ iſt, als C; auch D ⌜ ſeyn werde, als F, und ſo fort, ꝛc.

Beweiß.

Weilen A ⌜ iſt, als C, ſo wird die Verhaltnuß A zu B ⌜ ſeyn, als die Verhaltnuß C zu B. — d. d. Vorg. d. 8. ſ.

Die Verhaltnuß D zu E iſt unterdeſſen ⌐ der Verhaltnuß A zu B. — d. d. Vorg.

Dahero wird auch die Verhaltnuß D zu E ⌜ ſeyn, als die Verhaltnuß C zu B.

Es iſt aber B. C :: E F. — d. d. Vorg.

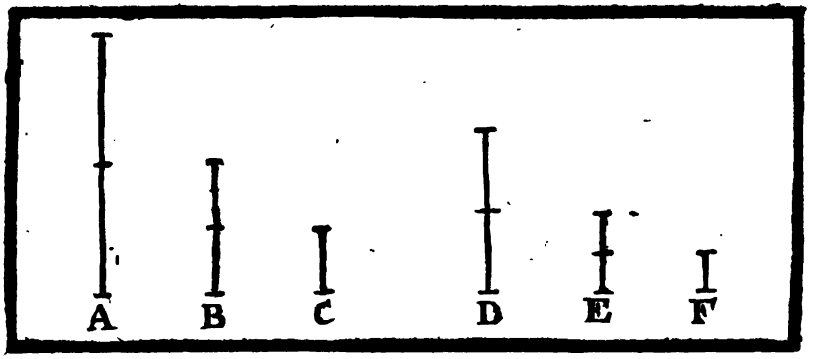
und durch die Umbkehrung C B :: F. E. — d. 4. an. ſ.

Deßwegen wird auch die Verhaltnuß D zu E ⌜ ſeyn, als die Verhaltnuß F. zu E.

Darauß folget letzlich, daß dann D ⌜ ſeye, als F. — d. 10. ſ.

Eben auff ſolche Weiſe ſolte bewieſen werden, wann A ⌝, oder ⌐ gegeben wird der C; daß auch D ⌝, oder ⌐ wäre, der F.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann drey Gröſſe ſeynd, und noch andere drey Gröſſen nach ſolcher Beſchaffenheit darzu genommen werden, alſo daß jederzeit zwey und zwey gegen einander gehaltener einerley Verhaltnuß haben, doch aber in einer verruckten Ordnung: Wann nun die erſte Gröſſe, gröſſer, kleiner, oder gleich iſt der dritten; ſo wird auch die vierte Gröſſe gröſſer, kleiner oder gleich ſeyn der ſechſten.

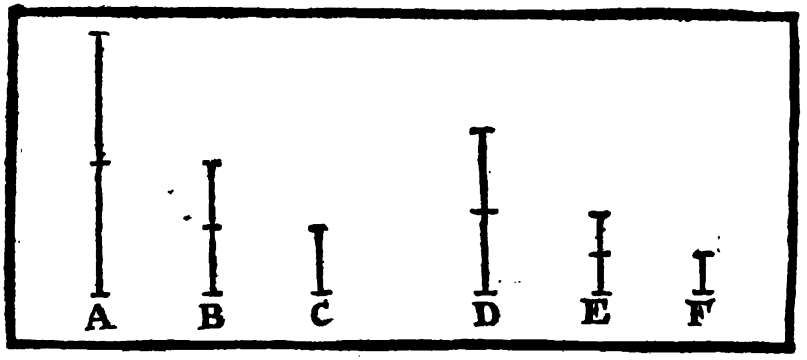
Es iſt gegeben, daß die drey Gröſſen A. B. C, gegen denen drey Gröſſen D. E. F. in verruckter Proportion ſtehen, nemlich A. B :: E. F, und B. C :: D. E. Dieſem nach ſaget man, wann A ⌜ ſeye, als C, daß auch D ⌜ ſeye, als F. u. ſ. f.

Beweiß.

Weilen A ⌜ iſt, als C, ſo wird die
Verhaltnuß A zu B ⌜ ſeyn, als die Verhaltnuß C zu B. d. 8. ſ.
Die Verhaltnuß A zu B iſt aber ▭ der Verhaltnuß E zu F. d. d. Vorg.
Dahero wird die Verhaltnuß E zu F ⌜ ſeyn, als die Verhaltnuß C zu B.
Unterdeſſen iſt gegeben B. C :: D. E.
und durch die Umbkehrung C. B :: E. D. d. 4. ſ.
Dahero wird die Verhaltnuß E zu F ⌜ ſeyn, als die Verhaltnuß E zu D.
Darauß folget, daß auch D ⌜ ſeye, als F. d. 10. ſ.

Welches zu beweiſen ware.

Eben auff ſolche Art beweiſet man, daß, wann A ⌝, oder ▭ iſt, der C; auch D ⌝, oder ▭ ſeye der F.



Die XXII. Vorgab.

Betrachtung.

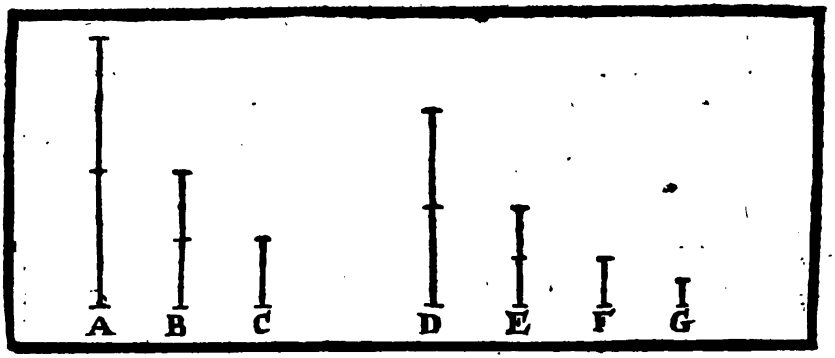
Wann so viel Gröſſen seynd (als man wil) und denen noch andere gleich an der Zahl in ordentlicher Proportion genommen werden: so werden solche Gröſſen auch in einer Verhaltnuß auß einer Gleichheit seyn.

Es ist gegeben, daß sich die drey Gröſſen A. B. C. zu denen drey Gröſſen D. E. F. in ordentlicher Proportion halten, das ist A. B :: D. E, und B. C :: E. F. Diesem nach sagt man, daß man auß der Gleichen giltig schlieſſen könne A. C :: D. F.

Beweiß.

Weilen gegeben ist A. B :: D. E:
so wird durch die Verwechslung seyn A. D :: B. E. d. 16. 5.
Abermahlen ist gegeben B. C :: E. F.
so wird auch durch die Verwechslung seyn B. E :: C. F. d. 16. 5.
Indeme nun ist, so wol A. D :: B. E.
als B E :: C. F.
So schlieſſet man, daß auch seye A. D :: C. F; d. 11. 5.
und durch die Verwechslung A. C :: D. F. d. 16. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XXIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann ſo viel Gröſſen ſeynd, (als man wil) und denen noch andere gleich an der Anzahl in einer verruckten Proportion genommen werden: ſo werden ſolche Gröſſen auch in der Verhaltnuß auß einer Gleichheit ſeyn.

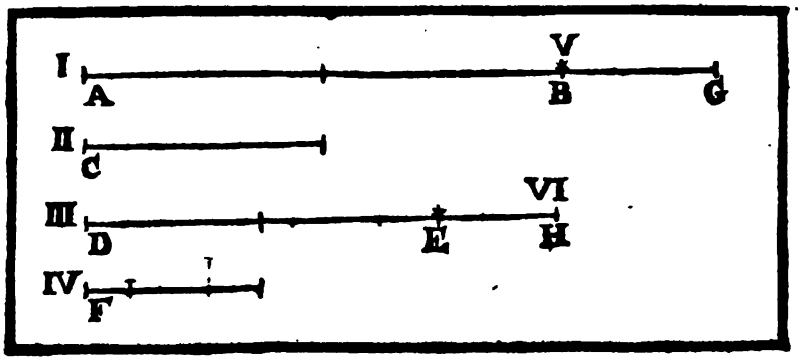
Es iſt gegeben, daß ſich die Gröſſe A. B. C zu denen drey Gröſſen D. E. F. in verruckter Proportion halten; nemlich daß es ſeye A. B :: E. F, und B. C :: D. E. Dieſem nach ſaget man, daß man auß der Gleichen giltig ſchlieſſen möge A. C :: D. F.

Zubereitung.

Mache vorhero B. C :: F zu einer andern, als wie nemlich zu G.

Beweiß.

Es iſt gegeben B. C :: D. E.	d. d. Vorg.
und gemacht worden B. C :: F. G.	d. d. Zub.
Folget, daß auch ſeye D. E :: F. G.	d. 11. ſ.
und durch die Verwechslung D. F :: E. G.	d. 16. ſ.
Unterdeſſen iſt auch gegeben A. B :: E. F, oder,	d. d. Vorg.
ſo ein Ding iſt, E. F :: A. B.	
Und gemacht worden B C :: F. G, oder,	d. d. Zub.
ſo ein Ding iſt, F. G :: B. C.	
Dahero wird auß dergleichen ſeyn E. G :: A. C.	d. 22. ſ.
Es iſt aber ſchon bewieſen worden D. F :: E. G.	
Deßwegen ſchlieſſet man, daß letzlich ſeye A. C :: D. F.	d. 11. ſ.
Welches zu beweiſen ware.	



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

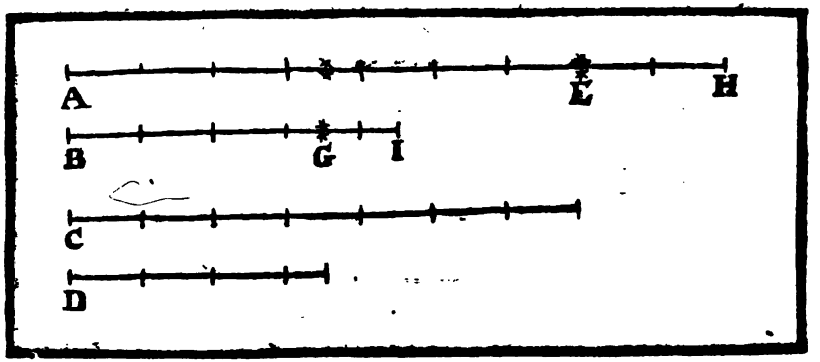
Wann die erſte Gröſſe ſich alſo gegen der anderten verhaltet, gleich wie die dritte gegen der vierten, und haltet ſich auch die fünffte alſo zu der anderten, gleich wie die ſechſte zu der vierten: ſo wird auch die erſte, und fünffte zuſammen alſo zu der anderten ſich verhalten, gleich wie die dritte und ſechſte zuſammen zu der vierten.

Es iſt gegeben, daß die erſte AB ſich verhalte zu der anderten C, gleich wie die dritte DE zu der vierten F. und die fünffte BG verhalte ſich auch zu der anderten C, gleichwie die ſechſte EH zu der vierten F. Dieſem nach ſaget man, daß es ſeyn werde AB + BG, C. :: DE + EH. F.

Beweiß.

Weilen es iſt BG. C:: EH. F.	d. d. Vorg.
ſo wird ſeyn durch die Umbkehrung C. BG:: F. EH.	d. d. an 4. f.
Es iſt aber AB. C:: DE. F.	d. d. Vorg.
Und, wie es bewieſen worden, C. BG :: F. EH.	
Folget, daß auß dergleichen ſeye AB. BG:: DE. EH.	d: 22. f.
Und durch die Zuſammenſetzung AB + BG BG :: DE + EH. EH.	d. 18. f.
Es iſt auch gegeben BG. C:: EH. F.	d. d. Vorg.
Deßwegen letztlich auß dergleichen ſeyn werde AB + BG. C:: DE + EH. F.	

Welches zu beweiſen ware.



Die XXV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann vier Gröſſen geproportionirt ſeynd, ſo wird allezeit die gröſſere, und die kleineſte zuſammen genommen gröſſer ſeyn, als die zwo übrige zuſammen genommene.

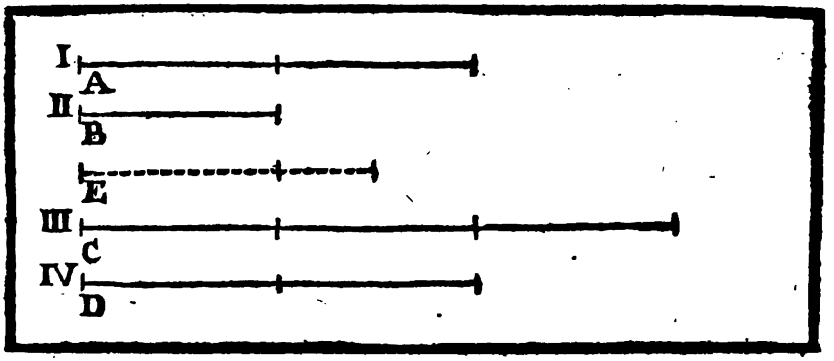
Es iſt gegeben, daß ſeye AH. BI :: C. D, und daß AH die gröſte, und alſo D die kleinſte Gröſſe ſeye. Dieſem nach ſaget man, daß die zwey Gröſſen AH + D ⌜ ſeynd, als die zwo übrige BI + C.

Zubereitung.

Von AH ziehe ab das Stück AE ⌐, der C. und von BI daß Stück BG ⌐, der D.

Beweiß.

Nunmehro verhaltet ſich AH. BI :: AE. BG
(dann AE ⌐, der C, und BG ⌐, der D gemacht iſt)
Dahero auch ſeyn werde EH. GI :: AH. BI. §. 19. 5.
Unterdeſſen iſt AH ⌜ gegeben, als BI.
Folget, daß auch EH. ⌜ ſeye als GI.
Wann man entzwiſchen zu denen zwey gleichen Gröſſen AE, und C. zwey gleiche Gröſſen D, und BG hinzu ſetzet.
So wird AE + D ⌐ ſeyn, der C + BG.
Wann man aber zu dieſen zwey gleichen Gröſſen AE + D und C + BG noch die zwey ungleiche Gröſſen, nemlich EH, und GI, beyderſeits hinzu ſetzet.
So folget letztlich, daß AE + D + EH, das iſt AH + D ⌜ ſeye, als C + BG + GI, das iſt BI + C.
Welches zu beweiſen ware.



Die XXVI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann die erſte Gröſſe zu der anderten eine gröſſere Verhaltnuß hat, als die dritte zu der vierten: ſo wird durch die Umbkehrung die anderte zu der erſten eine kleinere Verhaltnuß haben, als die vierte zu der dritten.

Es iſt gegeben, daß die erſte A zu der anderten B eine gröſſere Verhaltnuß habe, als die dritte C, zu der vierten D. Dieſem nach ſaget man, daß nach der Umbkehrung das Gegenſpiel geſchicht, und B zu A eine kleinere Verhaltnuß, als D zu C habe.

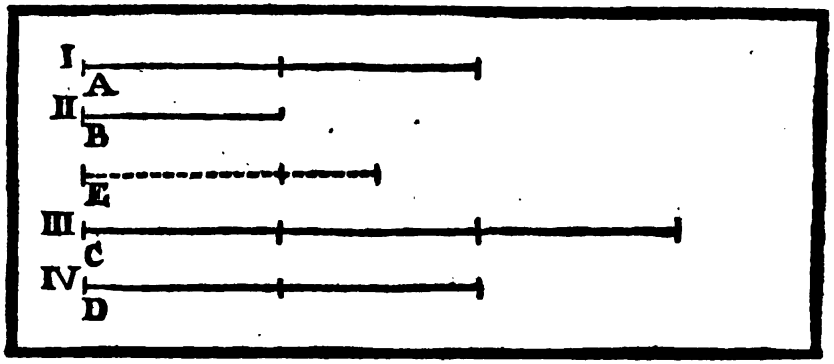
Zubereitung.

Seye gemacht C. D :: E. B.

Beweiß.

Die Verhaltnuß A zu B iſt ⌜, als die Verhaltnuß C zu D. d. d. Vorg.
Dahero wird auch die Verhaltnuß A zu B ⌜ ſeyn, als die Verhaltnuß E zu B.
Und deßwegen iſt die A ⌜, als die E. d. 10. ſ.
Darauff folget aber, daß die Verhaltnuß B zu A ⌝ ſeye, als die Verhaltnus B zu E. d. 8. ſ.
Es iſt aber gemacht E B :: C. D. d. d. Zub.
Und durch die Umbkehrung iſt B. E :: D. C. d. d. an. 4. ſ.
Dahero iſt auch die Verhaltnuß B zu A ⌝, als die Verhaltnuß D zu C.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXVII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann die erſte zu der anderten eine gröſſere Verhaltnuß hat, als die dritte zu der vierdten: ſo wird auch durch die Verwechslung die erſte zu der dritten eine gröſſere Verhaltnuß haben, als die anderte zu der vierdten.

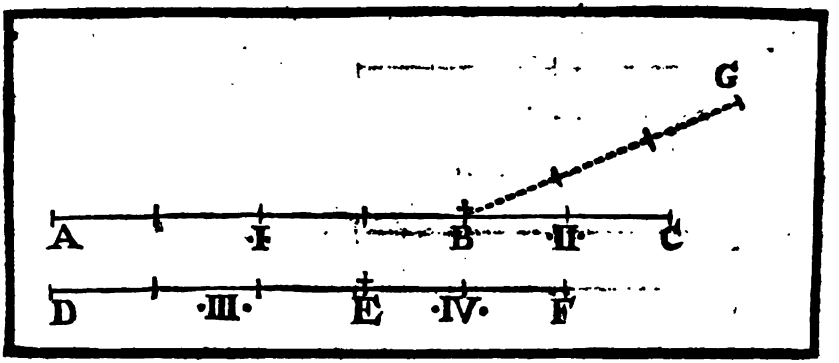
Es iſt gegeben, daß die Verhaltnuß der erſten A zu der anderten B ⌜ ſeye, als die Verhaltnuß der dritten C zu der vierdten D. Dieſem nach ſaget man, daß nach der Verwechslung A zu C auch eine gröſſere Verhaltnuß haben werde, als B zu D.

Zubereitung.

Mache vorhero C. D :: E. B.

Beweiß.

Weilen die Verhaltnuß A zu B ⌜ iſt, als die Verhaltnuß C zu D. — d. d. Vorg.
So iſt auch die Verhaltnuß A zu B ⌜, als die Verhaltnuß E zu B und deßwegen iſt die A ⌜, als die E. — d. 10. ſ.
Darauff folget auch, daß die Verhaltnuß A zu C ⌜ ſeye, als die Verhaltnuß E zu C. — d. 8. ſ.
Es iſt aber gemacht E. B :: C. D — d. d. Zub.
Und durch die Verwechslung iſt E. C :: B. D. — d. 16. ſ.
Dahero iſt auch die Verhaltnuß A zu C ⌜, als die Verhaltnuß B zu D.
Welches zu beweiſen ware.



Die XXVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann die erſte zu der anderten eine gröſſere Verhaltnuß hat, als die dritte zu der vierten, ſo wird auch durch die Zuſammenſetzung die erſte mit der anderten, zu der anderten eine Gröſſere Verhaltnuß haben, als die dritte mit der vierten, zu der vierten.

Es iſt gegeben, daß die Verhaltnuß der erſten Gröſſe AB, zu der anderten BC ⌜ ſeye, als die Verhaltnuß der dritten Gröſſe DE zu der vierten EF. Dieſem nach ſaget man, daß nach der Zuſammenſetzung auch AB + BC, zu BC eine gröſſere Verhaltnuß habe, als DE + EF zu EF.

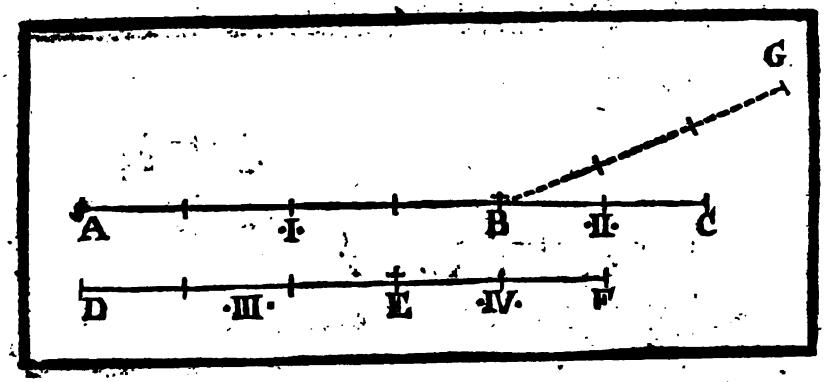
Zubereitung.

Seye vorhero gemacht GB. BC :: DE. EF.

Beweiß.

Weilen die Verhaltnuß AB zu BC ⌜ iſt, als die Verhaltnuß DE zu EF. d. d. Vorg.
ſo wird auch AB zu BC eine gröſſere Verhaltnuß haben, als GB zu BC.
Dahero iſt die AB ⌜, als die GB. d. 10. ſ.
Wann nun zu dieſen ungleichen Gröſſen beyderſeits die gemeine BC hinzu geſetzt wird,
So wird noch AB + BC ⌜ ſeyn, als GB + BC.
Unterdeſſen iſt gemacht GB. BC :: DE. EF. d. d. Zub.
Und durch die Zuſammenſetzung iſt GB + BC. BC :: DE + EF. EF. d. 18. ſ.
Dahero auch die Verhaltnuß AB + BC zu BC ⌜ iſt, als die Verhaltnuß GB + BC zu BC. d. 8. ſ.
Es iſt aber die Verhaltnuß GB + BC zu BC ⌐, der Verhaltnuß DE + EF zu EF.
Deßwegen wird noch die Verhaltnuß $\frac{AB + BC}{BC}$ ⌜ ſeyn, als $\frac{DE + EF}{EF}$.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXIX. Vorgab.

Betrachtung.

Wann durch die Zuſammenſetzung, die erſte mit der anderten Gröſſe, zu der anderten eine gröſſere Verhaltnuß hat, als durch die Zuſammenſetzung, die dritte mit der vierten zu der vierten; ſo wird auch durch die Zertheilung, die erſte zu der anderten eine gröſſere Verhaltnuß haben, als die dritte zu der vierten.

Es iſt gegeben, daß AB + BC, zu BC eine gröſſere Verhaltnus habe, als DE + EF zu EF. Dieſem nach ſaget man, daß nach der Zertheilung auch AB zu BC eine gröſſere Verhaltnuß habe, als DE zu EF.

Zubereitung.

Mache, daß es ſeye GB + BC. BC :: DE + EF. EF.

Beweiß.

Weilen AB + BC zu BC eine gröſſere Verhaltnuß hat, als DE + EF zu EF. d. d. Vorg.

So wird auch AB + BC zu BC eine gröſſere Verhaltnuß haben, als GB + BC. zu BC.

Dahero iſt die AB + BC Γ, als die GB + BC. d. 10. ſ.

Wann nun beyderſeits ſo wohl von AB + BC als GB + BC die gemeine BC darvon gezogen wird.

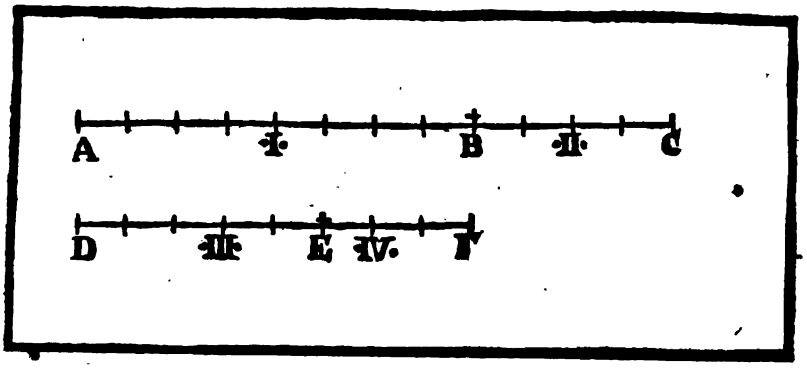
ſo wird auch überbleiben AB Γ, als GB. d. ſ. ax.

Unterdeſſen iſt gemacht GB + BC. BC :: DE + EF. EF. d. d. Zub.

Und durch die Zertheilung iſt GB BC :: DE. EF. d. 17. ſ.

Folget, daß auch AB zu BC eine gröſſere Verhaltnuß habe, als GB zu BC, oder dergleichen DE zu EF.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXX. Vorgab.

Betrachtung.

Wann durch die Zuſammenſetzung, die erſte mit der anderten Gröſſe, zu der anderten eine gröſſere Verhaltnuß hat, als durch die Zuſammenſetzung, die dritte mit der vierten zu der vierten, ſo wird entgegen durch die Verwendung die erſte und anderte zuſammen, zu der erſten eine kleinere Verhaltnuß haben, als die dritte und vierte zuſammen zu der dritten.

Es iſt gegeben, daß die zuſammen geſetzte AB + BC zu BC eine gröſſere Verhaltnuß habe, als DE + EF zu EF: Dieſem nach ſaget man, daß nach der Verwendung das Gegenſpiel geſchicht, und AB + BC zu AB eine kleinere Verhaltnuß habe, als DE + EF zu DE.

Beweiß.

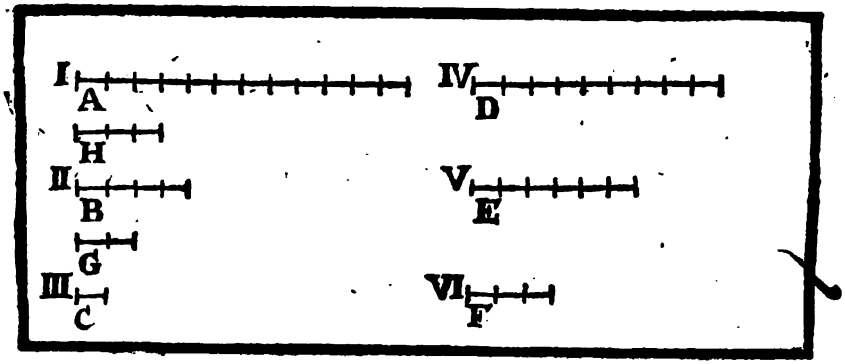
Dieweilen AB + BC zu BC eine gröſſere Verhaltnuß hat, als DE + EF zu EF. — d. d. Vorg.

So iſt durch die Zertheilung dannoch die Verhaltnuß AB zu BC gröſſer, als die Verhaltnuß DE zu EF. — d. 29. 5.

Entgegen durch die Umbkehrung hat BC zu AB eine kleinere Verhaltnuß, als EF zu DE. — d. 26. 5.

Und eben durch die Zuſammenſetzung hat AB + BC zu AB eine kleinere Verhaltnuß, als DE + EF zu DE. — d. 28. 5.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXI. Vorgab. Betrachtung.

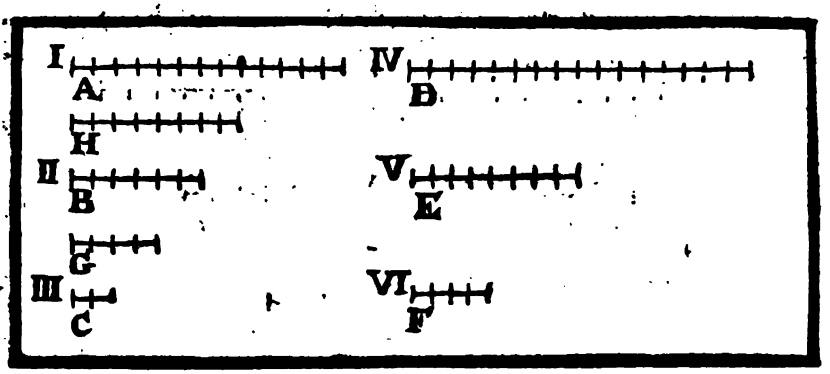
Wann drey Gröſſen ſeynd, und dieſen noch andere drey nach ſolcher Beſchaffenheit darzu genommen werden, alſo, daß die Verhaltnuß der erſten zu der anderten gröſſer ſeye, als die Verhaltnuß der vierten zu der fünfften; und abermahlen die Verhaltnuß der anderten zu der dritten auch gröſſer ſeye, als die Verhaltnuß der fünfften zu der ſechſten: So wird auch auß dergleichen die erſte zu der dritten eine gröſſere Verhaltnuß haben, als die vierte zu der ſechſten.

Es iſt gegeben, daß die erſte Gröſſe A zu der anderten B eine gröſſere Verhaltnuß habe, als die vierte D zu der fünfften E, und abermahlen die anderte B zu der dritten C eine gröſſere Verhaltnuß habe, als die fünffte E zu der ſechſten F. Dieſem nach ſaget man, daß nach der Verhaltnuß auß einer Gleichheit auch A zu C eine gröſſere Verhaltnuß habe, als D zu F.

Zubereitung. Mache, daß ſeye G. C :: E. F. und H. G:: D. E.

Beweiß.

Weilen die Verhaltnuß B zu C Γ iſt, als die Verhaltnuß E zu F, d. d. Vorg.
So iſt auch die Verhaltnuß B zu C Γ, als die Verhaltnuß G zu C. d. 10. ſ.
Dahero folget, daß die B Γ ſeye, als die G.
Und deßwegen iſt die Verhaltnuß A zu G. auch Γ,
als die Verhaltnuß A zu B. d. 8. ſ.
Es iſt aber gegeben, daß die Verhaltnuß A zu B Γ ſeye,
als die Verhaltnuß D zu E. d. d. Vorg.
Folget dahero, daß A noch viel eine gröſſere Verhaltnuß habe zu G, als D zu E.
Ferners, weilen gemacht iſt, H. G:: D. E.
ſo wird auch A eine gröſſere Verhaltnuß haben zu G, als H zu G.
und deßwegen iſt die A Γ, als die H. d. 10. ſ.
Darauff folget, daß die Verhaltnuß A zu C auch Γ ſeye,
als die Verhaltnuß H zu C. d. 8. ſ.
Es iſt aber gemacht H. G:: D. E d. d. Zub.
und G. C:: E F.
und auß dergleichen iſt H. C:: D. F. d. 22. ſ.
Dahero ſchlieſſet man, daß auch A zu C noch eine gröſſere Verh. habe, als D zu F.
Welches zu beweiſen ware.



Die XXXII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann drey Gröſſen ſeynd, und dieſen darzu noch andere drey nach ſolcher Beſchaffenheit genommen werden, daß nemlich die erſte zu der anderten eine gröſſere Verhaltnuß habe, als die fünffte zu der ſechſten; und abermahlen die anderte zu der dritten eine gröſſere Verhaltnuß habe, als die vierdte zu der fünfften: ſo wird auch auß dergleichen die erſte zu der dritten eine gröſſere Verhaltnuß haben, als die vierte zu der ſechſten.

Es iſt gegeben, daß die erſte Gröſſe A zu der anderten B eine gröſſere Verhaltnuß habe, als die fünffte E zu der ſechſten F. und abermahlen die anderte habe eine gröſſere Verhaltnuß zu der dritten C, als die vierte D zu der fünfften E hat. Dieſem nach ſaget man, daß auß der Verhaltnuß einer Gleichheit auch A eine gröſſere Verhaltnuß zu C habe, als D zu F.

Zubereitung.

Mache vorgehends, daß ſeye G. C :: D. E.
und H. G :: E. F.

Beweiß.

Es iſt gegeben, daß die Verhaltnuß B zu C Γ ſeye,
als die Verhaltnuß D zu E. d. d. Vorg.
Dahero auch B zu C eine gröſſere Verhaltnuß hat, als G zu C.
Und deßwegen iſt die B Γ, als die G.
Und folgends hat A eine gröſſere Verhaltnuß zu G d. 10. ſ.
als dieſelbe A zu B. d. 8. ſ.
Es iſt aber gegeben, daß A eine gröſſere Verhaltnuß habe
zu der B, als die E zu der F. d. d. Vorg.

Folget dann. daß A noch viel eine gröſſere Verhaltnuß habe zu G, als E zu F.

Indeme auch gemacht iſt H. G:: E. F. d. d. Zub.
So wird auch A zu G eine gröſſere Verhaltnuß haben, als H zu G.
Und deßwegen iſt die A Γ, als die H. d. 10. ſ.

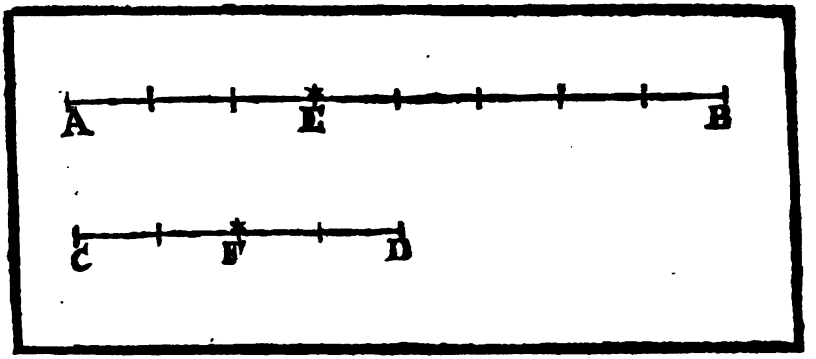
Darauff folget, daß A eine gröſſere Verhaltnuß zu C habe, als H zu derſelben C. d. 8. ſ.

Es iſt aber gemacht worden, daß die erſte H zu der anderten G ſich verhalte, gleich wie die fünffte E zu der ſechſten F. d. d. Zub.

Und die anderte G ſich verhalte zu der dritten C, gleich wie die vierdte D zu der fünfften E.
und auß dergleichen alsdann ſeye H. C:: D. F. d. 23. ſ.

Dahero ſchlieſſet man, daß auch die Verhaltnus A zu C gröſſer ſeye, als die Verhaltnus D zu F.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann eine gantze Gröſſe zu einer andern gantzen Gröſſe eine gröſſere Verhaltnuß hat, als das eine davon abgezogene Stück zu dem andern davon abgezogenenen Stück: ſo wird hernach das eine übrige Stück, zu dem andern übrigen Stück eine gröſſere Verhaltnuß haben, als das eine Gantze zu dem andern Gantzen.

Es iſt gegeben, daß die gantze A B eine gröſſere Verhaltnuß zu der andern gantzen CD habe, als das abgezogene Stück A E zu dem andern abgezogenen Stück CF. Dieſem nach ſaget man nun, daß das übrige Stück EB eine gröſſere Verhaltnuß habe zu dem übrigen Stück FD, als die gantze AB zu der gantzen CD.

Beweiß.

Es iſt gegeben, daß AB zu CD eine gröſſere Verhaltnuß habe, als AE zu CF. d. d. Vorg.

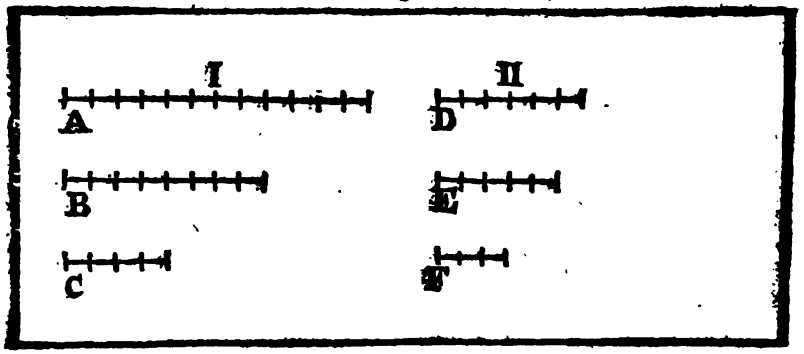
So wird durch die Verwexlung auch AB zu AE eine gröſſere Verhaltnuß haben, als CD zu CF. d. 27. 5.

Entgegen durch die Verwendung hat AB zu EB eine kleinere Verhaltnuß, als CD zu FD. d. 30. 5.

Dahero durch die Verwexlung hat auch AB zu CD eine kleinere Verhaltnuß, als EB zu FD. d. 27. 5.

Das iſt ein Ding, als wann man ſagete, daß die Verhaltnuß EB zu FD (nemlich eines übrigen Stücks zu dem andern übrigen Stück) kleiner ſeye als AB zu CD (nemlich eines gantzen zu dem andern gantzen).

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXIV. Vorgab. Betrachtung.

Wann ſo viel Groſſe auff einer Seiten, als auff der andern Seiten, ſeynd, und die erſte auff einer Seiten habe eine gröſſere Verhaltnuß zu der erſten auff der andern Seiten, als die anderte auff der einen Seiten, zu der anderten auff der anderten Seiten, und auch die anderte auff der einen Seiten habe eine gröſſere Verhaltnuß zu der anderten auff der anderten Seiten, als die dritte auff der einen Seiten, zu der dritten auff der anderten Seiten, und ſo fort. So geſchicht, daß die Gröſſe ſammentlich auff einer Seiten eine gröſſere Verhaltnuß haben zu denen Gröſſen ſammentlich auff der andern Seiten, als die übrige Gröſſe ſammentlich (wann beyderſeits die erſte darvon ſeynd abgezogen worden) zu denen übrigen Gröſſen ſammentlich auff der andern Seiten. Eine kleinere Verhaltnuß aber, als die erſte zu der erſten; und letztlich eine gröſſere Verhaltnuß, als die letzte zu der letzten.

Es ſeynd gegeben auff einer Seiten die drey Gröſſen A. B. C, und auff der andern Seiten die drey Gröſſen D. E. F. und A habe zu D eine gröſſere Verhaltnuß, als B zu B, und auch B zu E habe eine gröſſere Verhaltnuß, als C zu F. Dieſem nach ſaget man,

Daß die Verhaltnuß auß denen A + B + C ⌜ ſeye zu denen D + E + F, als die Verhaltnuß deren übrigen B + C zu denen übrigen E + F.

Die Verhaltnuß deren A + B + C ſeye aber ⌝ zu denen D + E + F, als A zu D hat. Letztlich,

Daß auch die Verhaltnuß deren A + B + C ⌜ ſeye zu denen D + E + F, als C zu F.

Beweiß.

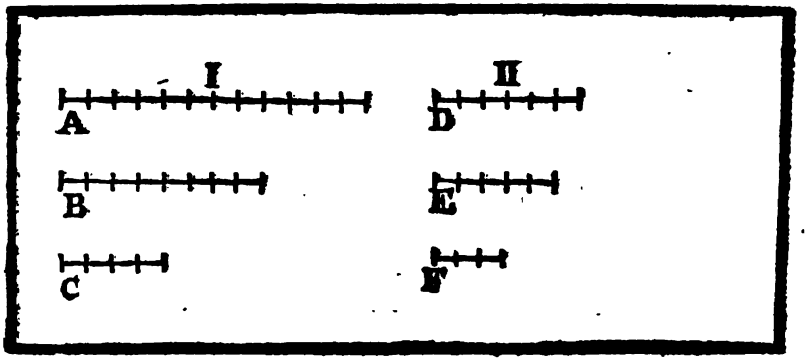
Weilen die Verhaltnuß A zu D ⌜ iſt, als die Verhaltnuß B zu E. d. d. Vorg.

So wird durch die Verwechslung auch die Verhaltnuß A zu B ⌜ ſeyn, als die Verhaltnuß D zu E. d. 27. f.

Und durch die Zuſammenſetzung wird auch die Verhaltnuß A + B zu B ⌜ ſeyn, als die Verhaltnuß D + E zu E. d. 28. f.

Und wiederumb durch die Verwechslung iſt die Verhaltnuß der A + B ⌜ zu D + E, als die Verhaltnuß B zu E. d. 27. f.

Nachdem dann die gantze A + B zu der gantzen D + E eine gröſſere Verhaltnuß hat, als die abgezogene B zu der abgezogenen E.



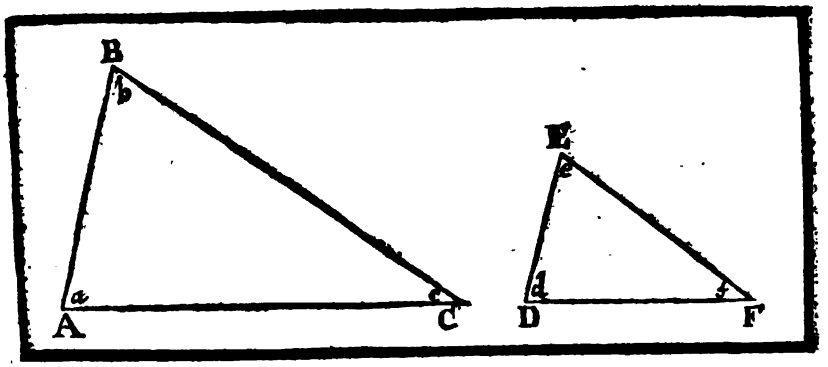
So wird auch folgends die übrige A zu der übrigen D eine gröſſere Verhaltnuß haben, als die gantze A + B zu der gantzen D + E. d. 33. f.
Eben auß dieſer Urſach wird B zu E eine gröſſere Verhaltnuß haben, als die gantze B + C, zu der gantzen E + F.
Dahero iſt die Verhaltnuß A zu D noch viel ⌐, als die Verhaltnuß der gantzen B + C zu der gantzen E + F.
Und durch die Verwexlung hat A zu der gantzen B + C eine gröſſere Verhaltnuß, als D zu der gantzen E + F.
Und durch die Zuſammenſetzung hat die gantze A + B + C eine gröſſere Verhaltnuß, zu der übrigen B + C, als die gantze D + E + F, zu der übrigen E + F. d. 28. f.
Letztlich wird durch die Verwexlung die Verhaltnuß der gantzen A + B + C zu der gantzen D + E + F ⌐ ſeyn, als die übrige B + C zu denen übrigen E + F.
Welches zum erſten zu beweiſen ware.
So ſaget man weiters, daß die Verhaltnuß deren A + B + C ſammentlich zu denen D + E + F ſammentlich ¬ ſeye, als die Verhaltnuß A zu D.
Dann die Verhaltnuß der gantzen A + B + C zu der gantzen D + E + F iſt ⌐, als die Verhaltnuß der abgezogenen B + C zu der abgezogenen E + F.
So folget, daß auch die übrige A zu der übrigen D eine gröſſere Verhaltnuß habe, als die gantzen A + B + C zu der gantzen D + E + F. d. 33. f.
Welches für das andere zu beweiſen ware.
Letztlich ſaget man, daß A + B + C ſammentlich zu D + E + F ſammentlich eine gröſſere Verhaltnuß habe, als C zu F.
Die Urſach iſt, weilen B zu E eine gröſſere Verhaltnuß hat, als C zu F. d. d. Vorg.
Dahero iſt durch die Verwexlung die Verhaltnuß B zu C auch ⌐, als die Verhaltnuß E zu F. d. 27. f.
Und durch die Zuſammenſetzung iſt auch die Verhaltnus der gantzen A + B zu C ⌐, als die Verhaltnuß der gantzen E + F zu F d. 28. f.
Und dahero wiederums durch die Verwexlung hat die gantze A + B zu der gantzen E + F eine gröſſere Verhaltnuß, als C zu F.
Es iſt unterdeſſen ſchon bewieſen worden, daß A + B + C zu D + E + F eine gröſſere Verhaltnuß habe, als B + C zu E + F.
Dahero ſchlieſſet man, daß A + B + C zu D + E + F. noch viel eine gröſſere Verhaltnuß habe, als C zu F allein.
Welches zu beweiſen ware.

Das

Sechste Buch

Deß Teutsch-redenden

Euclides.



Wort-Erklärungen.

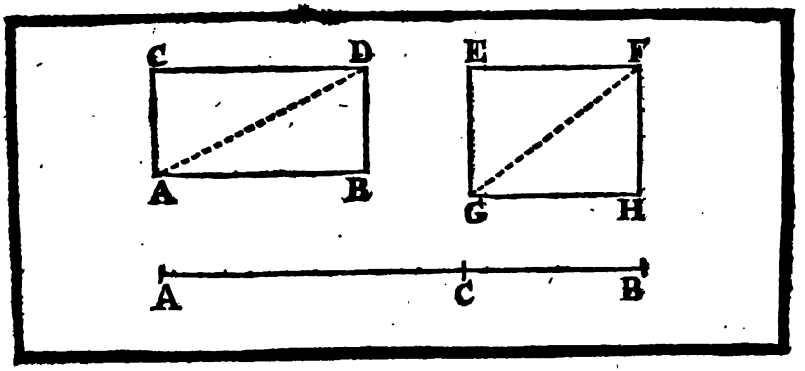
I.

Gleichförmige geradtliniſche Figuren ſeint (Figuræ ſimiles), welche alle Winckeln inſonderheit gegen einander gleich-groß, und die Seiten, welche umb ſothane gleiche Winckeln ſtehen, gleich-verhaltend (oder proportionirlich) haben.

Außlegung.

Zwey Sachen müſſen in gleichförmigen geradtliniſchen Figuren beobachtet werden; nemlich alle Winckeln inſonderheit einer Figur müſſen gleich ſeyn, allen Winckeln inſonderheit der andern Figur. Als wie hier in dem △ ABC iſt der ∠ a ⊓, dem ∠ d in dem △ DEF: und der ∠ b iſt ⊓, dem ∠ e. und letztlich der ∠ c iſt ⊓, dem ∠ f.

Hernach müſſen die Seiten, ſo umb die gleiche Winckeln ſtehen, gleichverhaltend ſeyn; das iſt, in dem △ ABC muß ſich die Seiten AC gegen der Seiten AB verhalten, gleich wie ſich in dem △ DEF, die Seiten DF zu der Seiten DE verhaltet; ſo muß ſich auch AB zu BC verhalten, gleich wie DE, zu EF; und letztlich muß ſich verhalten BC zu CA, gleich wie ſich verhaltet EF zu FD. Dieſem nach werden die zwey △ ABC, DEF einander gleichförmig genannt.



II.

Widerkehrliche, oder widerkehrlich-proportionirte Figuren (Reciprocæ figuræ) ſeynd, welche nach ſolcher Beſchaffenheit verhaltend gegen einander ſeynd, daß nemlich in der erſten Figur das erſte vorgehend, und das andere nachgehend; in der andern Figur aber, das erſte nachgehend, und das andere vorgehend ſich befinden.

Auslegung.

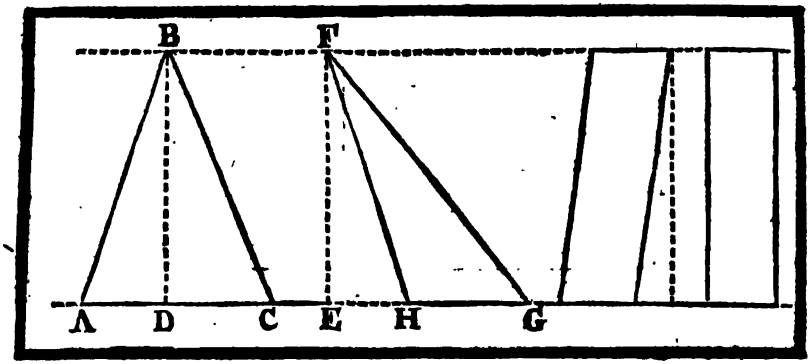
Es ſeynd die zwey ▭ AD, und GF. Wann ſich nun die Seiten AB zu der Seiten GH alſo verhaltet, gleich wie die Seiten HF ſich verhaltet zu der Seiten BD. das iſt, in dem erſten ▭ AD. befindet ſich das erſte vorgehend AB, und das andere Nachgehend BD. in dem andern ▭ GF aber, iſt das erſte nachgehend GH, und das andere Vorgehend HF: ſo werden dieſem nach, beyde ▭ (obwohlen ſie nicht gleichförmig ſeynd) widerkehrliche, oder Widerkehrlich-proportionirte Figuren genannt.

Weilen die △ ABD, und GHF die Helffte deren ▭ AD, und GF ſeynd, ſo werden ſie deßwegen auch widerkehrliche Figuren ſeyn.

III.

Man ſaget, daß eine gerade Linie (gleichwie AB) nach der äuſſerſten, und mittlern Proportion, oder Verhaltnuß zertheilt ſeye, wann die gantze Linie (AB) ſich alſo zu dem gröſſern Theil (AC) verhalte, gleich wie derſelbe gröſſere Theil (AC) ſich zu dem kleinern (CB) verhaltet.

Das iſt, wann es ſeye AB. AC :: AC. CB. ſo ſaget man, daß die Linie AB nach der äuſſerſten und mittlern Proportion im Punct C ſeye zertheilet worden.



IV.

Die Höhe einer Figur iſt die bleyrechte Linie, welche von dem Spitze, oder Scheidel-Punct, auff die Baſis, oder Grund-Linie herunter gelaſſen wird.

Außlegung.

Allhier in dem △ ABC iſt die Höhe, die ⊥ BD, welche auß dem Spitz B auff die Baſis AC iſt herunter gelaſſen worden: in dem △ HFG iſt die Höhe, die ⊥ EF, welche auß dem Spitz F auff die verlängerte Baſis GH iſt herunter gezogen worden.

Anmerckung.

Die jene Figur, deren Baſes in einer geraden Linie fort ſtehen, und einerley Höhe, das iſt, gleiche lange ⊥ haben, ſtehen zwiſchen einerley Parallel-Linien; und hingegen die Figuren, welche zwiſchen einerley Parallel-Linien liegen, haben einerley Höhe, oder gleiche ⊥.

Zu einem Exempel, es ſtehen die zwey △ ABC, und HFG mit ihren Baſes AC, und HG in einer geraden Linie fort, und haben ihre Höhe, nemlich die ⊥ BD, und FE einander gleich. Wann man nun durch die äuſſerſte Ende der Höhen B, und F eine gerade Linie ziehet: ſo werden die Linien AG, und BF einander Parallel ſeyn, und deßwegen die zween △ ABC, und HFG zwiſchen einerley Parallel-Linien liegen.

Die Urſach iſt, weilen der ∠ BDC ⊓ iſt, dem ∠ FEG. (dann ſie beyde recht ſeint) dahero wird die Linie DB = ſeyn, der Linie EF (d. 28. 1.) Unterdeſſen iſt die Höhe DB ⊓ gegeben worden, der Höhe EF: deßwegen folget, daß auch die Linie BF = ſeye, der Linie DH, oder der verlängerten AG (d. 33. 1.)

Hingegen, indeme die Linien BF und DH, zwiſchen welchen die zween △ ABC und HFG liegen, einander Parallel ſeint, auch wegen deren gleichen, nemlich rechten ∠ BDC und FEG, die Linie DB = iſt, der Linie EF: ſo wird BFED ein □ ſeyn, und deßwegen die gegenüberſtehende Seiten DB, und EF einander gleich haben, (d. 34. 1.) das iſt, die △ ABC, und HFG werden einerley Höhe haben.

V.

Eine Verhaltnuß, ſaget man, ſeye auß Verhaltnuſſen zuſammen geſetzt, wann die Gröſſe der Verhaltnuſſen (das iſt, die Nenner) unter einander vermehrter, eine andere, und neue Verhaltnuß gemacht haben: oder, eine zuſammen geſetzte Verhaltnuß (Ratio compoſita) iſt eine Verhaltnuß, welche auß der Vermehrung etlicher anderer Verhaltnuſſen entſtanden iſt.

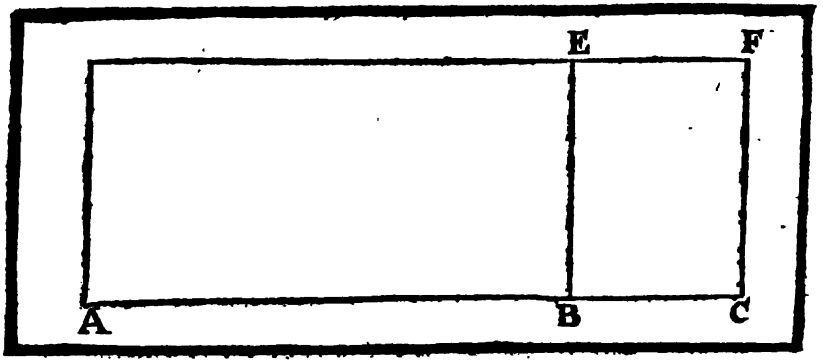
Was die Gröſſe einer Verhaltnuß (welche in dieſer Wort-Erklärung auch ein Nenner genandt wird) ſeye, und wie ſolche zu finden, iſt in der Anmerckung über die 3. def. deß 5. Buchs angezeiget worden; wann es ſich nun zutraget, daß mehr Gröſſen oder Nenner der Verhaltnuſſen, eine durch die andere ordentlich vermehret werden, ſo heiſt man die letzte darauß entſtandene Zahl oder Gröſſe eine zuſammengeſetzte Verhaltnuß.

Zu einem Exempel, es ſeynd die ſtäts nacheinander gehende Gröſſen A. B. C. D. der Nenner oder die Gröſſe der Verhaltnuß A zu B iſt 3, oder, ſo ein Ding, die Gröſſe der Verhaltnuß A zu B iſt dreyfach: der Nenner oder die Gröſſe B zu C iſt 2, oder gedoppelt. Letztlich der Nenner, oder Gröſſe der Verhaltnuß C zu D, iſt 3. oder dreyfach.

A	B	C	D
36	12	6	2
	3	2	3

Wann nun dieſe drey Nenner, oder Gröſſen 3. 2. 3. einer durch den andern ordentlich vermehret wird: ſo bekommt man in der letzt-entſtandenen Zahl, endlich den neuen Nenner 18 (oder achtzehenfache Verhaltnuß) welche die zuſammengeſetzte Verhaltnuß iſt, welche zwiſchen A. B. C. D. ſich befindet. Dann klar iſt, daß die dreyfache Gröſſe der Verhaltnuß, ſo A zu B hat, vermehrter mit der doppelten, welche B zu C hat, eine ſechsfache Verhaltnuß mache. Dieſe aber mit der dreyfachen, ſo C zu D. hat, vermehrter giebet letztlich eine achtzehenfache Verhaltnuß.

Diß iſt zu verſtehen, wann die Gröſſe, als wie in vorſtehendem Exempel, ſtäts nach einander folgen. Wann ſie aber in etlichen Abſetzungen beſtehen, gleich wie: wann man A 8 zu B 2, und hinwiederumb C 12 zu D 6 haltet, ſo iſt nöthig, daß man ſie anfänglich (deß leichten Beweiß halber) in ſtetsfolgende Gröſſe, welche doch mit denen A zu B, und C zu D einerley, oder gleichförmige Verhaltnuß haben, verändere. Man nehme dahero nach Gefallen eine Gröſſe oder Zahl, als wie 24. mache darmit, gleich wie A 8 zu B 2 iſt, alſo ſeye 24 zu der gefundenen 6, alsdann ſage, wie C. 12 zu D. 6 ſich haltet, alſo ſeye die gefundene 6 zu 3.

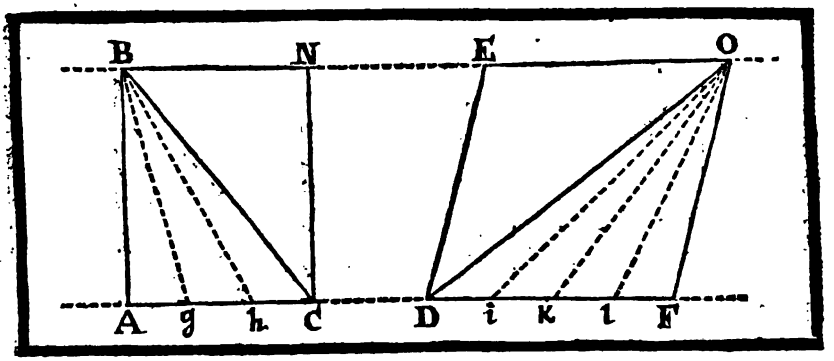


Dieſe drey Zahlen nun 24, 6, 3. werden ſtets nach einander folgen, und mit denen abgeſetzten Gröſſen A zu B, und C zu D geproportionirt ſeyn. Unterdeſſen iſt die zuſammengeſetzte Verhaltnuß deren Gröſſen 24, 6, 3 der neue Nenner 8. Dahero werde auch deren abgeſetzten Gröſſen A. B. C. D. die zuſammengeſetzte Verhaltnuß der neue Nenner 8 ſeyn. Dann die Gröſſe der Verhaltnuß A 8 zu B 2 iſt 4: und C 12 zu D 6 iſt 2. Wann nun dieſe zwey Nenner 4 und 2 durch einander vermehrt werden; ſo geben ſie eben den neuen Nenner 8.

VI.

Wann auff einer geraden Linie ein Parallelogram geſtellt wird, welches die gantze Linie nicht einnimmet, und hernachmahln eben in gleicher Höhe und Winckeln ein anders Parallelogram auff den Abgang der geraden Linie beſchrieben wird: ſo ſaget man, daß das erſte Parallelogram ein abgehendes Parallelogram ſeye. Entgegen wann ein Parallelogram auff einer längern Linie, als die gegebene iſt, geſtellt wird, und hernachmahln auff der gegebenen geraden Linie ein anders Parallelogram in gleicher Höhe und Winckeln gemacht wird, ſo ſagt man, daß das erſte ein übertreffendes Parallelogram ſeye.

Alſo iſt auff der Linie AC, das ▭ AE ein abgehendes, und das ▭ BF iſt der Abgang. Hingegen auff der Linie AC (wann ſolche länger, als die gegebene AB genommen wird) iſt das ▭ AF ein übertreffendes, und das ▭ BF iſt der Unterſchied oder Uberſchuß.



Die 1. Vorgab.

Betrachtung.

Die Triangeln, und die Parallelogrammen, welche gleiche Höhe haben, verhalten ſich gegen einander, gleich wie ihre Baſes.

Es ſeynd gegeben die zween △ ABC, und DOF, auch die ▭ AN, und DO, welche einerley Höhe haben: Dieſem nach ſaget man, daß ſich der △ ABC, oder das ▭ AN zu dem △ DOF, oder dem ▭ DO verhalte, gleich wie die Baſis AC, zu der Baſis DF. das iſt

AC. DF:: △ ABC. △ DOF. / ▭ AN. ▭ DO.

Zubereitung.

Indeme die fürgegebene △ ABC, und FOD gleiche Höhe haben, ſo ſetze ſie zwiſchen zwey ⫫. d. an. 4. def. 6.

Hernach zertheile die Baſes AC, und DF auff ſolche Art, daß beyde durch einen gemein-mäßlichen Theil gerad auffgemeſſen werden.

Seye Ag ein ſolcher Theil, welcher die Baſis AC juſt dreymahlen, und die Baſis DF juſt vier mahlen auffmeſſe.

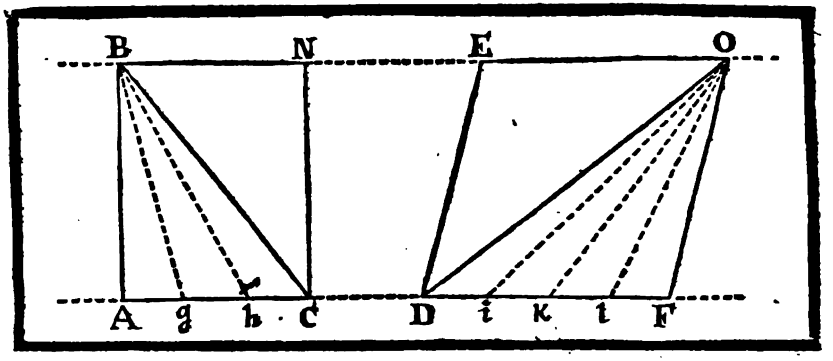
Ziehe letztlich die Puncten g. h in B, und die Puncten i. k. l. in O zuſammen.

Beweiß.

Dieweilen die Theile, oder kleine Baſes Ag. gh. hC. und Di ik. kl. lF einander ſeint ⊓ gemacht worden. d. d. Zuh.

So werden auch alle kleine △, als wie ABg, gBh, hBC, und DOi iOk. kOl. lOF. einander ⊓ ſeyn, d. 38. 2.

Und die Anzahl dieſer kleinen △ ⊓ ſeyn der Anzahl deren gleichen Theile, oder kleinen Baſes.



Die Baſis AC unterdeſſen iſt juſt in drey gleiche Theile, und die Baſis DF juſt in vier gleiche Theile abgetheilet worden. d. d. Zub.
deßwegen wird der △ ABC auch juſt in drey gleich kleine △, und der △ FOD juſt in vier gleich kleine abgetheilet ſeyn.
Und wegen gleicher Anzahl in einem und anderen ſeyn,
Daß wie offt die kleine Baſis Ag in der gantzen Baſis DF begriffen iſt, ſo offt auch der kleine △ ABg in dem gantzen △ FOD begriffen ſeyn werde.
Und ferners, ſo offt die zwey kleine und gleiche Baſes Ag + gh in der gantzen Baſis DF begriffen ſeynd, ſo offt auch die zwey kleine und gleiche △ ABg + △ gBh in dem gantzen △ FOD begriffen ſeyn werden.
Letztlich, ſo offt die drey kleine und gleiche Baſen Ag + gh + hC (oder AC) in der gantzen Baſis DF begriffen ſeynd, ſo offt auch die drey kleine und gleiche △ ABg + △ gBh + △ hBC (das iſt, der △ ABC) in dem gantzen △ FOD begriffen ſeyn werde. b. 14. ax. 1.
Und dahero ſeyn AC. DF :: △ ABC. △ DOF. { d. 6. def. 5. / d. 7. def. 5.

II.

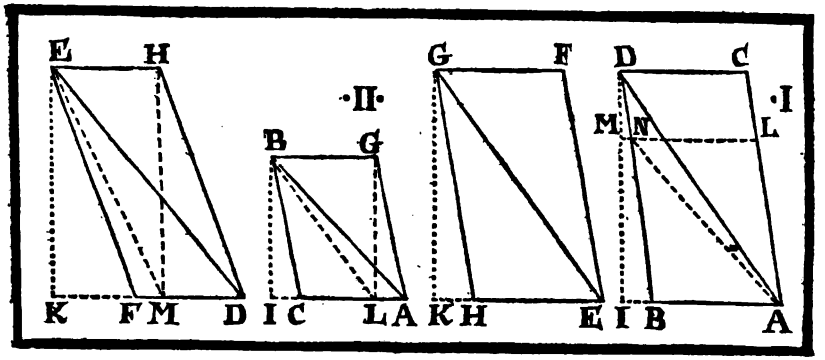
Es verhaltet ſich der △ ABC zu dem △ DOF; als wie das □ AN zu dem □ DO. { de 14. 5. / und 41. 1.
Der △ ABC iſt aber zu dem △ DOF; als wie die Baſes AC zu der Baſis DF. d. d. Vorg.
Folget, daß auch das □ AN zu dem □ DO ſeye; als wie die Baſis AC, zu der Baſis DF. d. 11. 5.
Welches zu beweiſen ware.

Anmerckung. I.

Die Triangeln (als wie ADB, EGH Fig. I.) und die Parallelogrammen (AD. EG), welche ſich gegen einander verhalten, gleich wie ihre Baſes (AB, und EH), haben einerley, oder gleiche Höhe (ID. KG).

Beweiß.

Wann man es nicht geſtehen will, ſondern ſagen, daß die Höhe ID ⌜ ſeye, als die Höhe KG.



So mache (wann es möglich iſt,) IM ⊓, KG,
und ziehe LM ═, AL, welche die Seiten BD abſchneiden werde in Punct N. d. 31. 1.
Ziehe letzlich A. N zuſammen.
Nunmehro wegen gleich vermeinter Höhe muß ſeyn
der △ ANB. △ EGH :: AB. EH. d. 1. 6.
Es iſt auch gegeben worden △ ADB. △ EGH :: AB. EH.
Dahero werden die zwey △ ANB. ADB. zu dem △ EGH einerley Verhaltnuß haben, und folgends der △ ANB ⊓ ſeyn dem △ ADB. d. 11. 5. und 9. 5.
Welches ungereimt iſt, nemlich ein Theil ⊓, ſeinem gantzen.
Deßwegen die Höhe nicht ungleich, ſondern einander ⊓ ſeyn werden.
Eben das gleiche wird von denen ▭ AD. EG (dann ſie gerad die Helffte deren △ ADB. EGH ſeint) geſchloſſen. d. 41. 1. d. 15. und 11. 5.

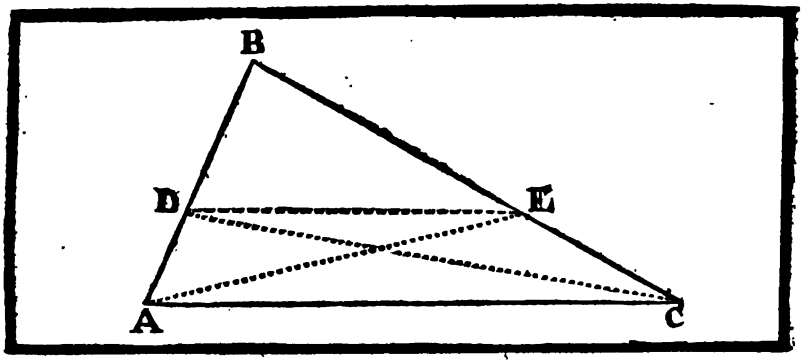
Fig. II.

Die △ ABC, und DEF, und die ▭ AB, und DE, welche gleiche Baſes AC, und DF haben, halten ſich gegen einander, gleich wie ihre Höhen IB. KE.

Mache vorhero IL ⊓, AC, und KM ⊓, DF. d. 3. 1.
Ziehe zuſammen LG. LB. IB, und MH. ME. KE.

Beweiß.

Die zwey Linien IL, und KM haben einerley Höhe: ∠ : d. d. Zub.
Dahero ſeyn werde △ LBI. △ MEK :: IB. KE. d. 1. 6.
Unterdeſſen iſt der △ LBI ⊓, dem △ ACB. d. 38. 1. und Zub.
und der △ MKE ⊓, dem △ DEF.
Folget, daß auch ſeye der △ ABC. △ DEF :: IB. KE, d. 7. 5. d. 1. 6.
Nemlich eine Höhe zu der andern Höhe. d. 41. 1.
Und folgends, das ▭ GC, ▭ HF :: IB. KE. und 15. 5.



Die II. Vorgab. Betrachtung.

Wann man in einem Triangel einer Seiten eine Parallel-Linie ziehet: ſo werden dardurch die andere zwo Seiten proportionirlich zertheilt: Und wann die zwo Seiten eines Triangels, durch eine gerade Linie ſeynd proportionirlich zertheilt worden: ſo wird eine ſolche Linie der übrigen Seiten Parallel lauffen.

Es iſt der Triangel ABC gegeben, in welchem die Linie ED ═ gezogen iſt der Seiten AC: ſo ſaget man, daß durch dieſe Linie die andere zwo Seiten AB. CB proportionirlich ſeynd abgetheilt worden. Das iſt, es werde ſeyn BD; DA :: BE, EC.

Ziehe vorhero zuſammen A, E. und C, D.

Beweiß.

Dieweilen die zwey △ ADE. CED zwiſchen zwey ═ liegen, und einerley Baſis DE haben. 6. 7. 5.

So wird der △ ADE ⊓ ſeyn, dem △ CED. 6. 37. 1.

und deßwegen wird der △ DBE zu dieſen zweyen gleichen △ einerley Verhaltnuß haben.

Das iſt △ DBE. △ ADE :: △ DBE. △ CED.

Unterdeſſen wegen einerley Höhe wird auch ſeyn

der △ DBE. △ ADE :: die Baſis BD zu DA 6. 1. 6.

und der △ DBE. △ CED :: die Baſis BE, zu EC.

Dahero letztlich ſeyn wird BD. DA :: BE, zu EC. 6. 11. 5.

II.

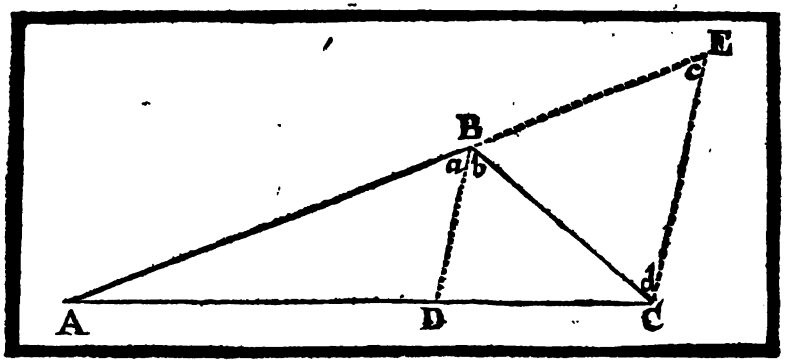
Es iſt gegeben, daß die Linie DE die zwey Seiten deß △ ABC proportionirlich zertheile, nemlich BD. DA :: BE. EC. ſo ſaget man, daß dieſelbe Linie DE mit der dritten Seiten AC ═ lauffe.

Dann der △ DBE. △ ADE :: △ DBE. △ CED. 6. 6. Vorg.

Dahero wird wegen gleicher Verhaltnuß der △ ADE ⊓ ſeyn, dem △ CED. 6. 9. 5.

Und folgends die Linie DE ═ ſeyn, der Linie AC. 6. 33. 1.

Welches zu beweiſen ware.



Die III. Vorgab.

Betrachtung.

Wann ein Winckel eines Triangels mit einer geraden Linie iſt gleich entzwey getheilt worden, und ſolche Linie auch die Baſis in einem Punct durchſchneidet, ſo werden ſich die zwey Stücke der Baſis alſo gegen einander verhalten, gleich wie die zwo Seiten deß Triangels. Und hinwiederumb, wann die zwey Stücke der Baſis mit denen übrigen zwo Seiten eine gleiche Verhaltnuß haben: ſo wird die gerade Linie, welche auß dem Winckel in die Baſis iſt gezogen worden, und dieſelbe durchſchnitten, ſothanen Winckel gleich entzwey ſchneiden.

Es iſt gegeben der △ ABC, deſſen ∠ a + b gleich entzwey mit der Linie BD, welche die Baſis AC im Punct D durchſchneidet, zertheilet worden: ſo ſaget man, daß die Stücke AD. DC denen zwo Seiten AB. BC geproportioniret ſeyn, das iſt AD. DC:: AB. BC.

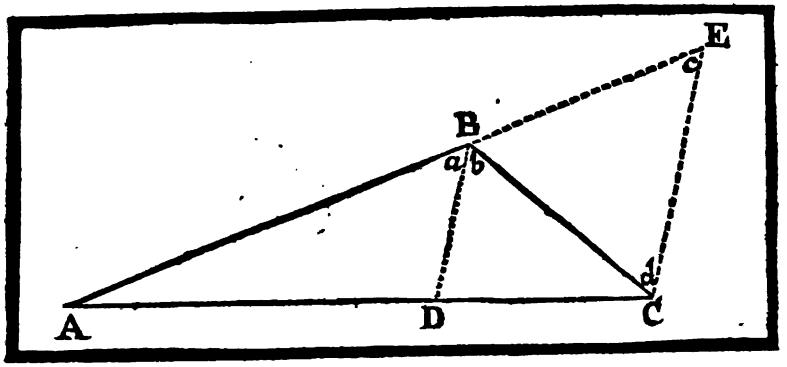
Zubereitung.

Verlängere die Seiten AB, biß daß das Stück BE der Seiten BC ⊓ werde.
Hange E. C zuſammen.

Beweiß.

Die Seiten BE iſt ⊓, der Seiten BC.	5. 5. Zub.
Dahero iſt der ∠ c ⊓, dem ∠ d.	5. 5. 1.
Unterdeſſen iſt der ∠ a + b ⊓, beyden ∠ c und d.	5. 32. 1.
Deßwegen iſt die Helffte, oder der ∠ b ⊓ dem ∠ d.	
Dahero iſt folgends die Linie DB = der Linie CE,	5. 27. 1.
und dann ſich verhaltet AB. BE (oder dergleichen BC) :: AD. DC.	5. 2. 6.

Welches das erſte zu beweiſen ware.



II.

Es iſt gegeben, daß in dem △ ABC die Linie DB die Baſis AC mit denen zwo Seiten AB. BC proportionirlich zertheilt habe, nemlich, daß es ſeye AD. DC: : AB. BC: ſo ſaget man, daß die Linie DB den ∠ a + b gleich entzwey werde zertheilt haben.

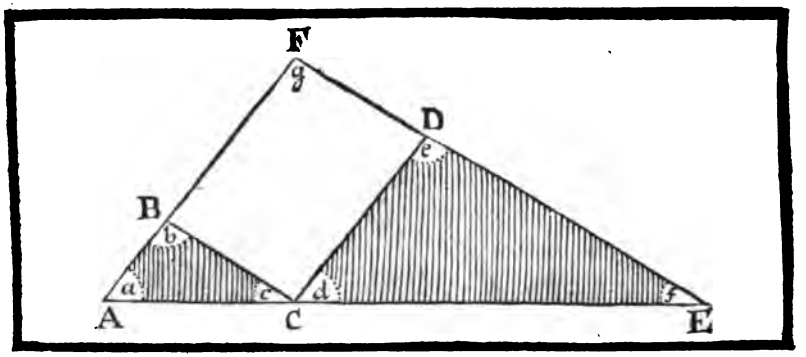
Mache vorhero die Figur, wie vorgehends.

Beweiß.

Es iſt AB. BC (oder dergleichen BE) : : AD. DC, d. d. Vorg.
Dahero wird die Linie DB = ſeyn, der Linie CE, d. 2. 6.
und der ∠ a □, dem ∠ c, und der b □, dem ∠ d. d. 29. 1.
Wegen der zwey gleichen Seiten BC. BE aber, iſt der ∠ c □, dem ∠ d. d. 5. 1.
Dahero auch der ∠ a □, dem ∠ b iſt. d. 1. ax. 1.

Worauß man ſchlieſſet, daß der ∠ a + b gerade entzwey von der Linie DB ſeye zertheilt worden.

Welches zum anderten zu beweiſen ware.



Die IV. Vorgab.

Betrachtung.

Gleichwincklichte Triangeln, haben die jene Seiten, welche umb gleiche Winckeln ſtehen, gegen einander proportionirter; und die gleichförmig-haltnuß-ſagende Seite ſeynd, welche die gleiche Winckeln unterſpannen.

Es ſeynd gegeben die zween △ ABC, und CDE, welche gleichwincklicht ſeint, nemlich der ∠ a iſt □, dem ∠ d. und der ∠ b □, dem ∠ e. und der ∠ c □, dem ∠ f. Dieſem nach ſaget man, daß die Seiten beyder △ einander geproportionirt ſeint, das iſt, es wird ſich verhalten AB, AC :: CD, CE. und AC, BC :: CE, DE; letztlich AB. BC :: CD. DE, darauß auch erſcheinet, daß die gleichförmig-haltnuß-ſagende Seiten, die Seiten AB. CD, und AC. CE, und CB, ED ſeint.

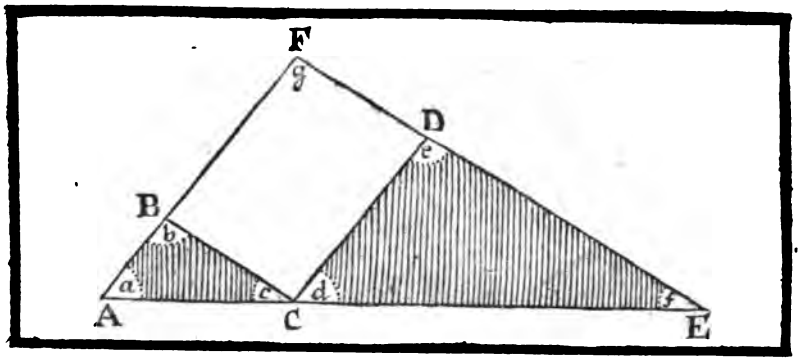
Zubereitung.

Setze die zwey △ alſo zuſammen, daß die beyde Seiten AC, und CE eine gerade Linie machen.

Verlängere die Seiten AB, und ED, biß ſie in einem Punct, als wie F, zuſammen ſtoſſen.

Beweiß.

Der ∠ a iſt □, dem ∠ d. — d. d. Vorg.
Daher iſt die Linie AF ═, der Linie CD. — d. 28. 1.
Ingleichen auch, indeme der ∠ c □ iſt, dem ∠ f. — d. d. Vorg.
ſo wird die Linie BC ═ ſeyn, der Linie FE, oder dem Stück DF. — d. 28. 1.
Worauß man ſchlieſſet, daß die Figur BFDC ein ▭ ſeye, — d. 35. def. 1.
und deßwegen die Seiten BF □, CD, und FD □, BC habe. — d. 34. 1.
Nach dieſem betrachte den groſſen neu-entſtandenen △ AFE, ſagend,
Weilen BC ═ iſt, der Seiten FE. — d. d. Vorg.



So wird seyn AB. BF (oder dergleichen CD) :: AC. CE. d. 2. 6.
Und durch die Verwexlung AB. AC:: CD. CE. d. 16. 5.
Welche die erste Vergleichung ist.
Hernach ist in dem △ AFE, auch CD ═, der Seiten AF. d. d. Vorg.
So wird seyn AC. CE:: FD (oder dergleichen BC) ED
Und durch die Verwexlung AC. BC:: CE. DE. d. 16. 5.
Welche die anderte Vergleichung ist.
Letztlich in deme ist AB. AC:: CD. CE, und d. d. Vorg.
AC. BC:: CE. DE.
So wird auß dergleichen seyn AB. BC:: CD. DE. d. 22. 5.
Welches zum letzten zu beweisen ware.

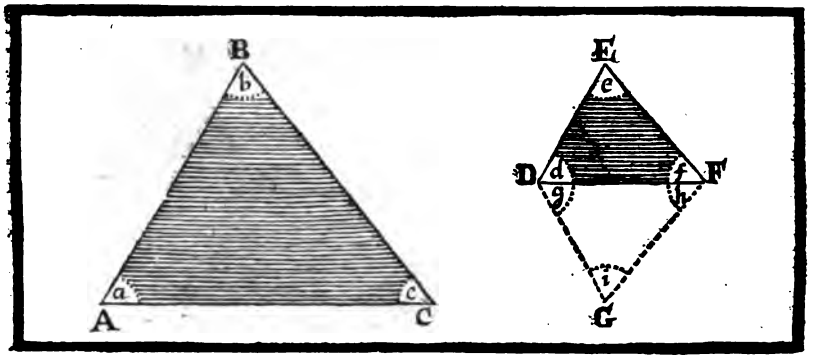
Folge.

I.

Alle gleichwincklichte △ seint auch gleichförmig.

II.

Wann man in einem △ eine Linie ziehet ═, einer Seiten deß △,
so wird solche einen kleinen △ abschneiden, der gleichförmig ist dem gantzen.
Gesetzt man ziehet in dem △ AFE die Linie CD, ═ der Seiten AF,
so wird hernach der △ CDE gleichförmig seyn, dem △ AFE.
Dann der ∠ d ist ⊓, dem ∠ a, und der ∠ e ⊓, dem ∠ g. d. 29. 1.
der ∠ f ist auch beyden △ gemein.
Dahero werden beyde △ gleichwincklicht, und folgends durch
diese 4. Vorg. einander gleichförmig seyn.



Die V. Vorgab. Betrachtung.

Wann zwey Triangel ihre Seiten gegen einander geproportionirt haben: ſo werden ſie auch ihre Winckeln, welche von gleichförmig-haltnuß-ſagenden Seiten unterſpannet ſeynd, gleich einander haben.

Es ſeynd gegeben die zwey △ ABC. DEF, die ihre Seiten gegen einander geproportionirt haben, nemlich BA. AC :: ED. DF, und BC. CA :: EF. FD. Letztlich BC. BA :: EF. ED. ſo ſaget man, daß ſie einander gleich wincklicht ſeyn, und die gleichförmig-haltnuß-ſagende Seiten BA. ED, und AC. DF, und CB. FE gleiche Winckeln unterſpannen.

Zubereitung.

Mache auff DF den △ DGF, alſo, daß der ∠ g ⊓, dem ∠ a, d. 23. 1
und der ∠ h ⊓, dem ∠ c ſeye. Der ∠ i wird hernach ⊓ ſeyn dem ∠ b. d. 32. 1

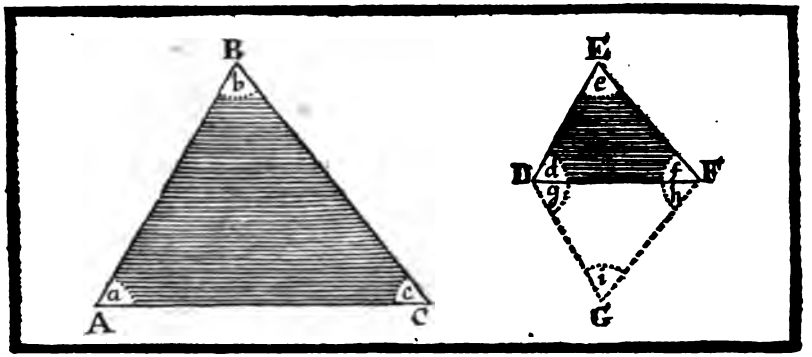
Beweiß.

Der △ DGF iſt gleichförmig, dem △ ABC. (d. d. Zub. und 4. Cor. 1. 6.
Dahero wird ſich halten GD. DF :: BA. AC. d. 1. def. 6.
Es haltet ſich auch BA. AC :: ED. DF. d. d. Vorg.
deßwegen wird auch ſeyn GD. DF :: ED. DF. d. 11. 5.
Warauff folget, daß DG ⊓ ſeye, der ED. d. 9. 5.

Abermahlen, indeme iſt GF. FD :: BC. CA (d. d. Zub. u. 4 Cor. 1. 6.
und ſich auch haltet BC. CA :: EF. FD. d. d. Vorg.
ſo wird auch ſeyn GF. FD :: EF. FD. d. 11. 5.
Worauff folget, daß GF ⊓ ſeye der EF. d. 9. 5.

Letztlich, wegen der gemeinen Baſis DF, wird
der △ DGF ⊓ ſeyn, dem DEF. d. 8. 1.
Und folgends der ∠ d ⊓, dem ∠ g (oder dem gleichen ∠ a.)
und der ∠ f ⊓, dem ∠ h (oder dem gleichen ∠ c.)
Letztlich auch der ∠ e ⊓ dem ∠ b. d. 32. 1.

Welches zu beweiſen ware.



Die VI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann in zwey Triangeln, ein Winckel eines, gleich iſt, einem Winckel deß andern, und die zwo Seiten, welche die gleiche Winckeln begreiffen, gegen einander geproportionirt ſeint, ſo werden ſolche zwey Triangeln gleichwincklicht einander ſeyn.

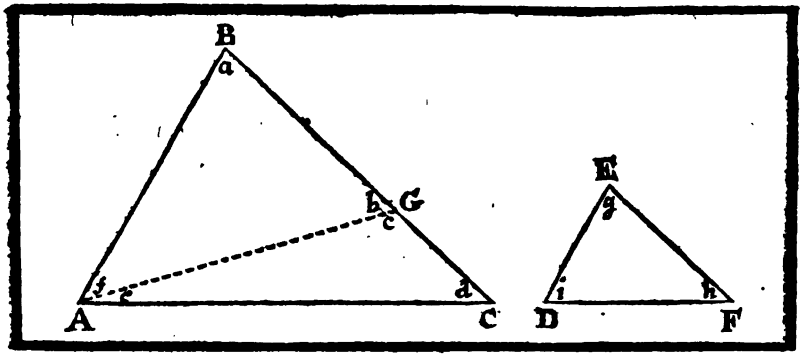
Es ſeint gegeben die zwey △ ABC. DEF, welche die ∠ a und d einander gleich haben, und die Seiten, welche die gleichen ∠ begreiffen, geproportionirt, das iſt BA. AC :: ED. DF. Dieſem nach ſaget man, daß ſolche beyde △ auch gleichwincklicht einander ſeyn, nemlich der ∠ b ⊓, dem ∠ e, und der ∠ c ⊓, dem ∠ f.

Zubereitung.

Auff DF mache den △ DGF ſolcher geſtalt, daß der ∠ g ⊓ ſeye, dem ∠ a, und die beyde ∠ h, i ⊓, beyden ∠ c, &c. d. 23. 1.

Beweiß.

Der △ DGF iſt gleichförmig dem △ ABC; d. d. Zub. und 4. 6.
Deßwegen ſich verhaltet GD. DF:: BA. AC.
Es iſt aber BA. AC:: ED. DF. d. d. Vorg.
Derohalben wird auch ſeyn GD. DF:: ED. DF. d. 11. 5.
und deßwegen iſt GD ⊓ der ED. d. 9. 5.
Unterdeſſen iſt die Seiten DF beyden △ DGF. DEF gemein, d. d. Zub. und Vorg.
und der ∠ g (oder der gleiche ∠ a), ⊓ dem ∠ d.
Dahero wird auch die Seiten GF ⊓ ſeyn, der Seiten FE, und folgends die übrige ∠ deß △ DEF ⊓ ſeyn, denen d. 4. 1.
übrigen ∠ deß △ DGF, welche ſeynd gemacht worden ⊓ denen übrigen ∠ deß △ ABC.
Welches zu beweiſen ware.



Die VII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann in zweyen Triangeln, ein Winckel eines gleich iſt, einem Winckel deß andern, und zwo Seiten, ſo umb andere zwey Winckeln ſtehen, gegen einander geproportionirt ſeyn, die übrige zwey Winckeln aber entweder ein jeder zugleich kleiner, oder ein jeder zugleich gröſſer ſeint, als ein rechter: ſo werden die zwey Triangeln gleichwincklicht ſeyn, und die jene Winckeln, umb welche die proportionirte Seiten ſtehen, einander gleich haben.

Es ſeynd gegeben die zwey △ ABC, und DEF, deren ein ∠ a ⊓ iſt, dem andern g, und die zwo Seiten BA. AC umb den ∠ f + e geproportionirt ſeynd, denen zwo Seiten ED. DF umb den ∠ i; die übrige zween ∠ d und h aber, ein jeder zugleich, ſonderlich kleiner, oder ſonderlich gröſſer iſt, als ein rechter. Dieſem nach ſaget man, daß die zwey △ ABC, und DEF einander gleichwincklicht, und die ∠ f + e und i (umb welchen die geproportionirte Seiten BA. AC, und ED. DF ſtehen, letztlich auch die übrige zween ∠ d und h einander gleich ſeyn werden.

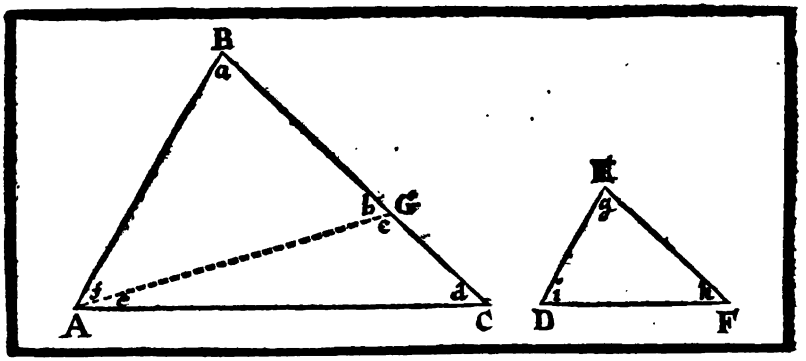
Erſter Fall, worinnen die zwey ∠ d, und h beyde ſpitzig gegeben werden.

Beweiß.

Will man es nicht geſtehen, ſondern einwerffen, daß, obwohlen beyde ∠ d und h ſpitzig gegeben worden ſeint, nichts deſtoweniger der ∠ f + e doch ⊓, und alſo ungleich ſeyn werde dem ∠ i.

So mache dann, wann es möglich iſt, mit der Linie AG den ∠ f ⊓, dem ∠ i.

Weilen nunmehro der ∠ a ⊓ iſt dem ∠ g. d. d. Vorg.
und der ∠ f ⊓ gemacht worden, dem ∠ i,
nach deß Widerſagers Meynung.

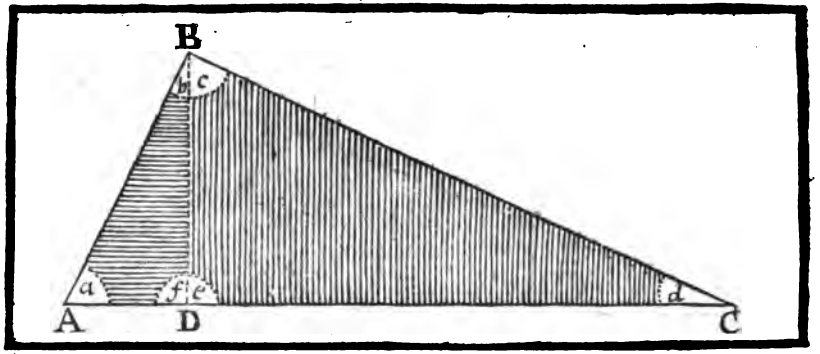


So folget, daß auch der ∠ b ⊓ seye, dem ∠ h. — 5. 32. I.
und deßwegen werden beyde △ ABG, und DEF einander gleichförmig seyn. — 5. 4. 6.
und sich verhalten BA. AG :: ED. DF. — 5. 1. def. 6.
Es ware aber anfänglich BA. AC :: ED. DF. — 5. d. Vorg.
Dahero wird auch seyn BA. AG :: BA. AC. — 5. 11. 5.
Darauß folget, daß AG ⊓ seye, AC. — 5. 9. 5.
und deßwegen der ∠ c ⊓ seyn werde, dem ∠ d. — 5. 5. 1.
Der ∠ d aber, gleich wie der ∠ h, ist ein jeder für einen spitzigen ∠ angegeben worden.
Dahero auch der ∠ c ein spitziger seyn werde.
und folgends der ∠ b ein stumpffer ∠ seyn muß. — 5. 13. Cor. 2.
Welches aber ungereimt ist, massen der ∠ b schon spitzig, und erst ⊓, dem ∠ h ist bewiesen worden. — 5. d. Vorg.

II.

Wann beyde ∠ d, und h ein jeder stumpff gegeben wird.
So werde eben diese Unförmlichkeit darauß entstehen, daß nemlich der ∠ c ein stumpffer, und der ∠ b ein spitziger seyn werde, indeme doch der ∠ b auch ein stumpffer nach Meinung deß Widersagers hätte seyn müssen.
Dahero man letztlich schliesset, daß gestalt dieser Sachen nothwendig der △ ABC gleichwincklicht seye, dem △ DEF; und also die übrige ∠ f + e und d ⊓ habe, denen übrigen ∠ i. und h.

Welches zu beweisen ware.



Die VIII. Vorgab. Betrachtung.

Wann auß einem Winckel eines rechtwincklichten Triangels eine bleyrechte Linie auff die Baſis herunter gelaſſen wird: ſo machet ſolche zween andere winckelrechte Triangeln, welche ſo wohl mit dem gantzen, als unter ſich ſelbſten, einander gleichförmig ſeyn werden.

Es iſt gegeben der △ ABC, der einen rechten ∠ b + c hat, auß welchem die bleyrechte BD auff die Baſis AC iſt herunter gelaſſen worden. Dieſem nach ſaget man, daß die zwey gemachte kleine △ ADB, und CDB nicht allein unter ſich, ſondern auch mit dem gantzen △ ABC, gleichförmig ſeyn werden.

Beweiß.

Erſtlich iſt klar, daß die drey ∠ b + c, und f, und e, drey rechte Winckeln ſeynd, und deßwegen einander gleich. [d. d. Vorg. / d. 10. ax. 1.

Nun iſt in denen zwey △ ADB, und ABC, der ∠ f ⊓, dem ∠ b + c, und der ∠ a beyden △ gemein:

Dahero wird auch der dritte ∠ b ⊓ ſeyn, dem dritten ∠ d. d. 32. 1.
und deßwegen der △ ADB gleichförmig ſeyn dem △ ABC. d. 4. 6.

Abermahlen iſt in denen zwey △ BDC, und ABC, der ∠ e ⊓, dem ∠ b + c und der ∠ d beyden △ gemein.

Folget, daß auch der dritte ∠ c ⊓ ſeye, dem dritten ∠ a. d. 32. 1.
Deßwegen iſt auch der △ BDC. gleichförmig dem △ ABC. d. 4. 6.
und folgends ſeynd alle drey △ ADB. BDC. ABC einander gleichförmig. d. 11. 5.
Welches zu beweiſen ware.

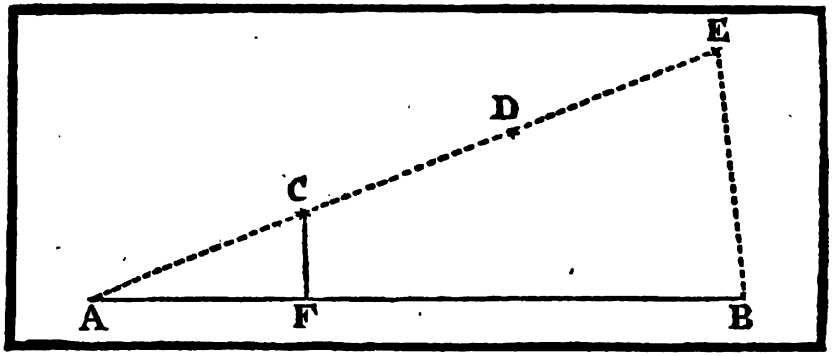
Folge. I.

Daß die ⊥ BD die mittlere Proportional-Linie zwiſchen denen zweyen Stücken AD, und DC der gantzen Baſis AC ſeye, dann wegen der Gleichförmigkeit deren zwey △ ADB, und BDC wird ſeyn: AD. DB :: DB. DC. d. 4. 6.

II. Daß eine jede Seiten, welche den rechten ∠ begreiffen, die mittlere Proportional-Linie ſeye zwiſchen der gantzen Baſis AC, und dem Stück, welches ſolche Seiten berühret: dann wegen der Gleichförmigkeit deren zwey △ ABC, und ADB wird erſtlich ſeyn

AC. AB :: AB. AD. d. 4. 6.

Hernach wegen der Gleichförmigkeit deren zween △ ABC, und BDC, wird auch ſeyn AC. BC :: BC. DC. d. 4. 6.



Die IX. Vorgab.

Handgriff.

Von einer vorgegebenen geraden Linie einen gewiſſen begehrten Theil abzuſchneiden.

Es ſeye gegeben die gerade Linie AB, von welcher man verlanget, zu einem Exempel den dritten Theil darvon.

Handgriff.

Ziehe die gerade Linie AB, welche mit AB einen ∠ nach Gefallen mache.

Nehme nach Gefallen einen Theil, als wie AC, auff der Linie AE ſo offt, als viel man Theile von AB abzuſchneiden verlange; als wie hier verlanget man den dritten Theil.

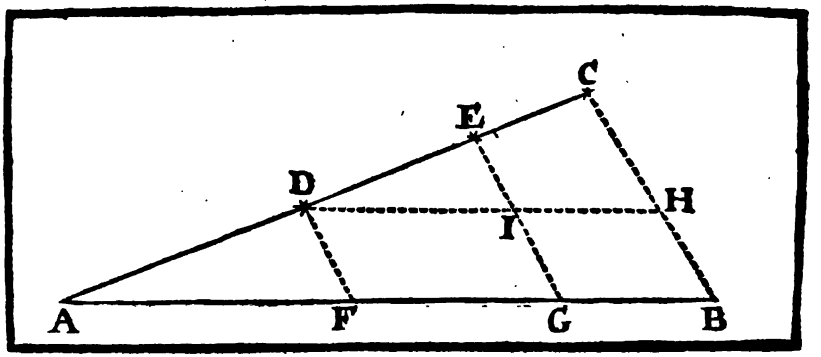
Setze dann den Theil AC in die Linie AE dreymahlen nacheinander in denen Puncten C. D. E.

Hange EB zuſammen, und ziehe auß C die Linie CF. d. 31. 1.
Welche ═ lauffe mit EB.

Nun ſage ich, daß das Stück AF auch ein Drittheil von der gantzen Linie AB ſeye.

Beweiß.

Weilen in dem △ ABE die Linie CF ═ iſt der Linie BE d. d. Hand.
ſo wird ſeyn EC. CA :: BF. FA d. 2. 6.
Und durch die Zuſammenſetzung EA. CA :: BA. FA. d. 18. 5.
Es iſt aber AC, ein dritter Theil von der gantzen AE. d. d. Hand.
Folget, daß auch AF ein dritter Theil ſeye von der gantzen AB.
Welches zu machen ware.



Die X. Vorgab.

Handgriff.

Eine vorgegebene gerade Linie in gleichförmige Stücke abzutheilen, gleich wie eine andere vorgegebene gerade Linie getheilet iſt.

Es ſeynd zwey gerade Linien AC, und AB gegeben, die erſte iſt nach Gefallen in drey Stücke zerſchnitten worden, nemlich in AD. DE, und EC; hiermit verlanget man die andere Linie AB eben in drey Stücke zu ſchneiden, welche aber gleichförmig, das iſt, geproportionirt denen drey Stücken der Linie AC ſeyn ſolten, nemlich AF. FG :: AD. DE, und FG. GB :: DE. EC.

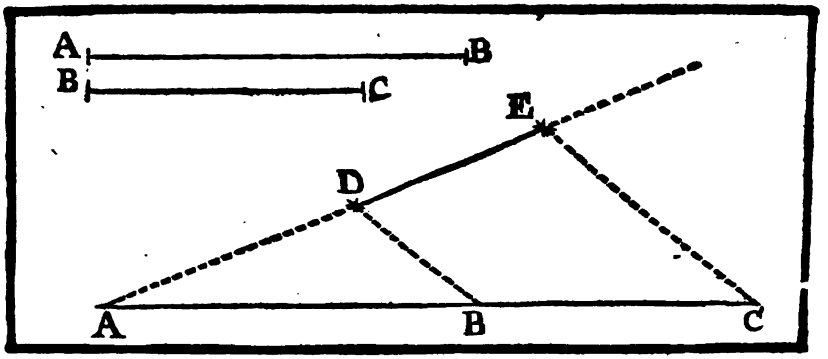
Handgriff.

Laine die Linie AC auff AB, damit ſie ungefähr mit ihrem Ende einen ∠ mache.
Hange CB zuſammen; und auß denen Puncten E, und D ziehe die Linien FG, und DF ═, der Linie BC. d. 31. 1.
Letztlich ziehe auß D die Linie DH ═, der Linie AB, Welche die ═ EG, und BC in denen Puncten I und H durchſchneidet, und verurſachet, daß die Figuren FI, und GH ▭ ſeynd. d. 33. 1. und 35. def. 1.

Beweiß.

In dem △ AGE iſt die Linie DF ═, der Linie GE. d. d. Hand.
Dahero werde ſeyn AF, FG :: AD. DE. d. 2. 6.
das iſt, die Theile AF. FG ſeynd proportionirlich denen Theilen AD. DE.
Ferner, weilen in dem kleinen △ DHC die Linie EI ═ iſt, der HC. d. d. Hand.
So wird ſich verhalten DI. IH :: DE. EC d. 2. 6.
Unterdeſſen ſeynd die Figuren FI, und GH ▭, und DI, IH ⌐ denen FG GB d. d. Hand. und 33. 1.
Dahero wird auch ſeyn FG. GB :: DE. EC. d. 7. 5.

Welches zu machen ware.



Die XI. Vorgab.

Handgriff.

Zu zweyen vorgegebenen geraden Linien die dritte Proportional-Linie zu finden.

Es seynd gegeben die zwey Linien AB. BC, zu welchen man die dritte Proportional-Linie zu haben verlanget; das ist, es solte seyn AB. BC:: BC, zu der gesuchten, nemlich DE.

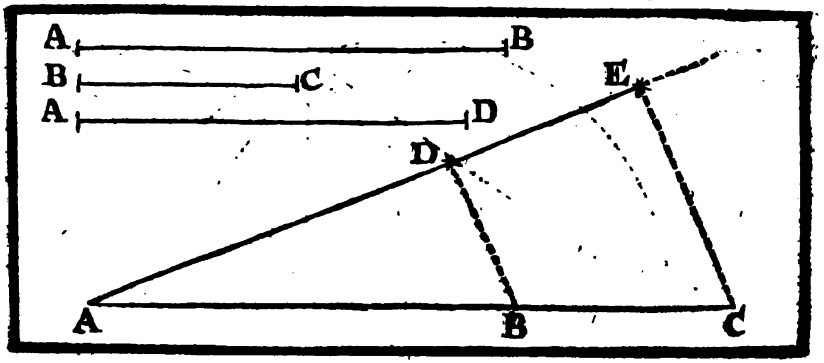
Handgriff.

Mache nach Gefallen einen ∠, als wie CAE
Auff die Linie AC setze nach einander die gegebene AB. BC,
Auff der Linie AE mache das Stück AD ⊓, der Linie BC.
Hange D. B zusammen, und ziehe auß C die Linie CE ═ der Linie CD. d. 31. 1.
So wird das Stück DE die gesuchte dritte Proportional-Linie seyn.

Beweiß.

In dem △ CAE ist DB ═, EC. d. d. Hand.
Dahero wird seyn AB. BC:: AD. DE. d. 2. 6.
Es ist aber AD ⊓ gemacht worden, der BC. d. d. Hand.
folget, daß auch seye AB. BC:: BC. DE.

Welches zu machen ware.



Die XII. Vorgab.

Handgriff.

Zu drey vorgegebenen geraden Linien, die vierte Proportional-Linie zu finden.

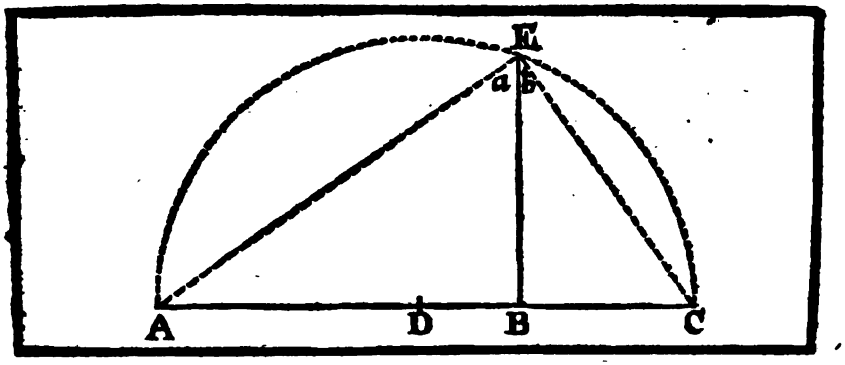
Es ſeynd gegeben die drey Linien AB. BC, und AD, zu welchen man die vierte Proportional-Linie zu haben verlanget, daß es nemlich ſeye AB. BC:: AD zu der gefundenen vierten DE.

Handgriff.

Mache nach Gefallen einen ∠, als wie CAE.
Auff die Linie AC ſetze an einander die Linien AB. BC.
Und auff die Linie AE, die dritte Linie AD.
Hange DB zuſammen, und auf C ziehe CE ═, BD, d. 31. 1.
So wird das Stück DE die vierte Proportional-Linie ſeyn.

Beweiß.

In dem △ CAE iſt DB ═, der Linie CE. d. d. Hand.
Dahero wird ſich halten AB. BC:: AD. DE. d. 2. 6.
Das iſt, DE iſt die vierte Proportional-Linie.
Welches zu machen ware.



Die XIII. Vorgab.

Handgriff.

Zwischen zwey geraden Linien eine mittlere Proportional-Linie zu finden.

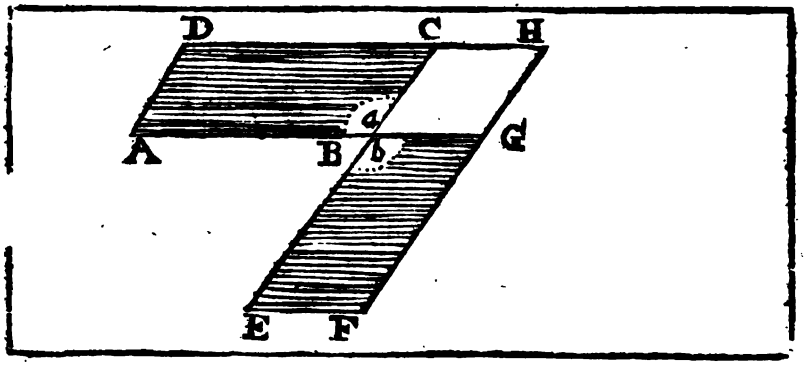
Es seynd gegeben die zwey Linien AB, und BC, zwischen welchen man die mittlere Proportional haben will, nemlich, es solte sich verhalten AB. zu der gefundenen mittlern Proportional-Linie BE. als wie dieselbe gefundene BE. zu BC. das ist AB. BE :: BE. BC.

Handgriff.

Setze AB. BC gerad in einer Linie fort.
Zertheile AC in mitten in D.
Auß D mit der Weite AD schreibe einen halben Zirckel AEC.
Auß dem Punct B erhöhe die ⊥ BE, biß an den Umbkreiß.
Diese Linie BE wird die mittlere Proportional-Linie seyn.
Hange unterdessen A. E, und C. E zusammen.

Beweiß.

Der ∠ a + b ist ein rechter ∠. 3. 31. 3.
Daher wird die ⊥ BE, welche auß dem rechten ∠ a + b in die Basis AC gezogen worden, die mittlere Proportional-Linie seyn, nemlich d. 8. Cor. 1. 6.
AB. BE :: BE. BC.
Welches zu machen ware.



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

Deren gleich groſſen Parallelogrammen, die einen gleichen Winckel haben, ſeint die Seiten, welche umb die gleichen Winckeln ſtehen, widerkehrt-geproportionirt: und hinwiederumb die Parallelogrammen, die einen gleichen Winckel, und die Seiten, welche umb die gleichen Winckel ſtehen, widerkehrt-geproportionirter haben, ſeynd einander gleich groß.

Es ſeynd gegeben die zwey ▭, AC, und BF, welche erſtlich einen gleich groſſen Inhalt, hernach die zwey ∠ a und b einander gleich haben. Dieſem nach ſaget man, daß ihre Seite AB, BC, und EB, BG, ſo umb die gleiche ∠ a und b ſtehen, widerkehrt-geproportionirt haben, das iſt, es wird ſich verhalten AB. BG :: EB. BC.

Zubereitung.

Setze die zwey ▭, allwo ſie die gleichen ∠ a und b haben, ſolcher geſtalt an einander, daß nicht allein die zwo Seiten AB, BG eine gerade Linie, ſondern auch die andere zwo Seiten EB, und BC eine andere gerade Linie machen.

Hernach verlängere DC, und FG, biß ſie in einen Punct, als wie H, zuſammen kommen.

Auß dieſer Zubereitung wird ein drittes ▭ BH entſtehen, Welches wegen der Parallel-Linien, ſo wol mit dem ▭ AC, als mit dem ▭ BF einerley Höhe haben werde.

Beweiß.

Das ▭ AC iſt ▭, dem ▭ BF. d. d. Vorg.

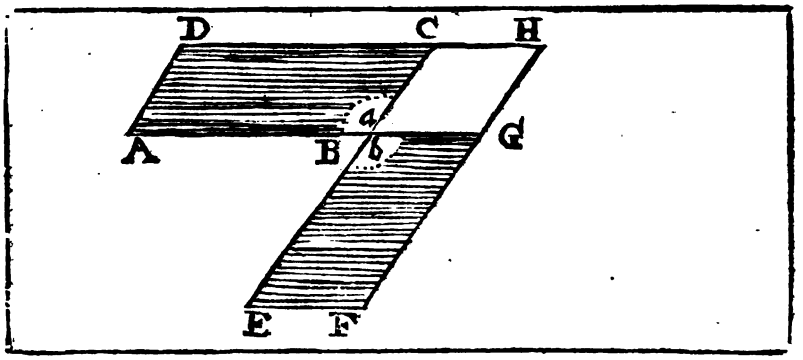
Dahero wird ſeyn, das ▭ AC. ▭ BH :: ▭ BF. ▭ BH. d. 7. 5.

Es verhaltet ſich aber das ▭ AC. ▭ BH : : Baſis AB. Baſis BG. d. 1. 6.

Und das ▭ BF. ▭ BH :: Baſis EB. Baſis BC.

Dahero wird letztlich ſeyn AB. BG :: EB. BC. d. 11. 5.

Welches das erſte zu beweiſen ware.



II.

Es seynd gegeben die □ AC, und BF, welche erstlich die zween ∠ a, und b einander gleich, hernach die Seiten widerkehrt geproportionirter haben, das ist, AB. BG:: EB. BC; so saget man, daß diese zwey □, von einerley Grösse, oder Inhalt seynd.

Die Zubereitung bleibet, wie oben.

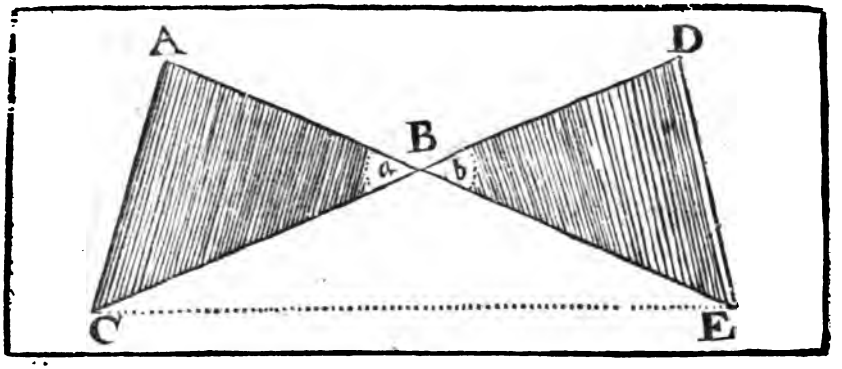
Beweiß.

Wegen einerley Höhe des □ BH mit denen zwey □ AC. BF.
wird seyn, Basis AB. Basis BG:: □ AC. □ BH. 1. 6.
und Basis EB. Basis BC:: □ BF. □ BH.

Es ist aber gegeben AB. BG:: EB. BC.
Dahero wird auch seyn □ AC. □ BH:: □ BF. □ BH. 11. 5.

Und deßwegen wird das □ AC = seyn, dem □ BF. 9. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XV. Vorgab.

Betrachtung.

Deren gleich groſſen Triangeln, welche einen gleichen Winckel haben, ſeint die Seiten, ſo umb die gleiche Winckeln ſtehen, wiederkehrt-geproportionirt, und hinwiederumb die Triangeln, welche einen gleichen Winckel, und die Seiten, ſo umb die gleiche Winckeln ſtehen, wiederkehrt-geproportionirter haben, ſeynd einander gleich groß.

Es ſeynd gegeben die zween △ ABC, und DBE, welche erſtlich einen gleich groſſen Inhalt, hernach die zween ∠ a, und b einander gleich haben. Dieſem nach ſaget man, daß ſie ihre zwey Seiten AB. CB. nnd DB. EB, welche umb die gleiche ∠ a, und b ſtehen, wiederkehrt geproportionirt haben, das iſt AB. BE :: DB. BC.

Zubereitung.

Setze die zwo Seiten AB. BE, allwo die gleichen ∠ a und b ſtehen, nach einander in einer geraden Linie ABE fort.

So wird folgends auch CBD eine gerade Linie ſeyn. d. 14. und 15. 1.

Ziehe hernach C und E zuſammen, worauß ein dritter △ CBE entſtehet, welcher ſo wohl mit dem △ ABC einerley Höhe BC, als mit dem △ DBE einerley Höhe BE hat.

Beweiß.

Weilen der △ ABC ⊓ iſt, dem △ DBE. d. d. Vorg.

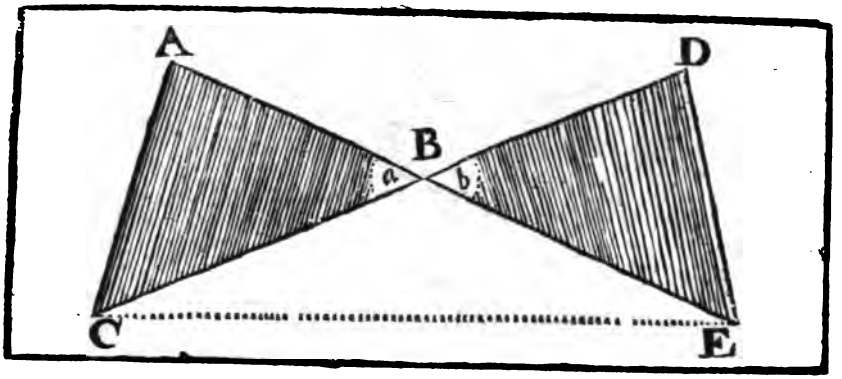
ſo wird ſeyn der △ ABC. △ BCE :: △ DBE. △ CBE. d. 7. 5.

Es haltet ſich aber der △ ABC. △ CBE :: Baſis AB. Baſis BE, d. 1. 6.

und der △ DBE. △ CBE :: Baſis DB. Baſis BC.

Dahero wird auch ſeyn AB. BE :: DB. BC. d. 11. 5.

Welches das erſte zu beweiſen ware.



II.

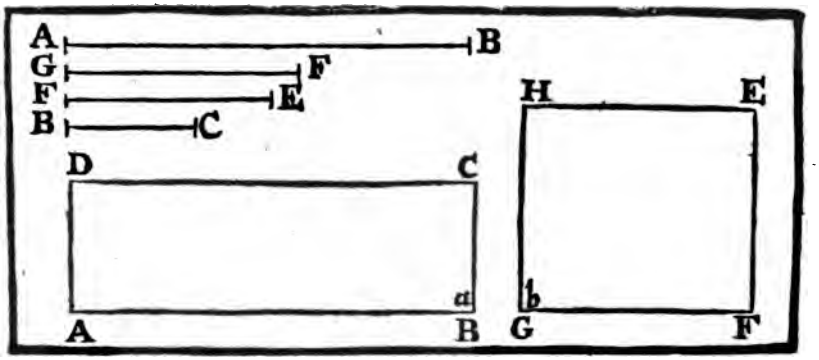
Es ſeynd gegeben die zween △ ABC, und DBE, welche erſtlich die ∠ a, und b einander gleich haben, und hernach die Seiten AB. BC, und DB. BE einander wiederkehrt proportionirlich haben, das iſt AB. BE :: DB. BC. Dieſem nach ſaget man, daß der △ ABC ⊓ ſeye, dem △ DBE.

Die Zubereitung verbleibet wie oben.

Beweiß.

Es iſt AB. BE :: △ ABC. △ CBE. d. 1. 6.
und DB. BC :: △ DBE. △ CBE
Durch die Vorgab aber iſt AB. BE :: BD. BC
Dahero ſeyn werde △ ABC. △ CBE :: △ DBE. △ CBE. d. 11. 5.
Und deßwegen wird der △ ABC ⊓ ſeyn, dem △ DBE. d. 9. 5.

Welches zu beweiſen ware.



Die XVI. Vorgab. Betrachtung.

Wann vier gerade Linien geproportionirt ſeint: ſo wird das winckelrechte Parallelogram, welches von denen zwey äuſſerſten Linien iſt zuſammen geſetzt worden, gleich ſeyn dem winckelrechten Parallelogram, welches von denen zwey mittlern Linien iſt gemacht worden: und hinwiederumb, wann das winckelrechte Parallelogram, ſo von denen zwey äuſſerſten Linien iſt gemacht worden, gleich iſt, dem winckelrechten Parallelogram, welches von denen zwo mittlern Linien iſt zuſammen geſetzt worden: ſo ſeynd ſolche vier Linien geproportionirt.

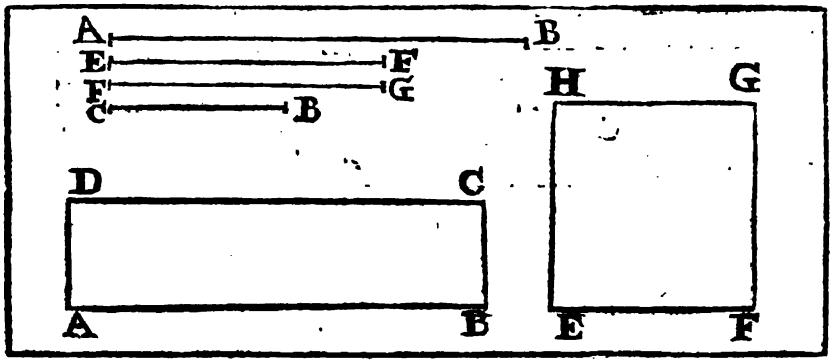
Es ſeynd gegeben die vier Linien AB. GF. FE. BC einander geproportionirt, nemlich AB. GF :: FE BC. Dieſem nach ſaget man, daß, wann auß der erſten AB, und letzten BC ein winckelrechtes □, als wie AC gemacht werde, und auch ein anderes winckelrechtes □, als wie GE, auß denen zwo mittlern Linien GF, und FE, ſolche □ hernach einen gleichen Inhalt begreiffen.

Beweiß I.

Der ∠ a im □ AC iſt ⊓, dem ∠ b im □ GE. d. d. Vorg.
und die Seiten verhalten ſich auch gegen einander geproportionirt
das iſt AB. GF :: FE. BC. d. d. Vorg.
Diß aber iſt widerkehrlich geproportionirt. d. 2. def. 6.
Deßwegen wird das □ AC ⊓ ſeyn, dem □ GE; d. 14. 6.
Welches das erſte zu beweiſen ware.

II. Es ſeynd gegeben die zwey winckelrechte □ AC, und GE eines gleichen Inhalts. Dieſem nach ſaget man, daß die vier Seiten, oder die gleiche Linien. AB. GF. FE. BC, auß welchen zwey äuſſerſten das □ AC, und auß welchen zwey mittlern, das andere □ GE iſt gemacht worden, einander geproportionirt ſeyn, das iſt AB. GF :: FE. BC.

Beweiß. Das □ AC iſt ⊓ gegeben, dem □ GE, d. d. Vorg
und auch der ∠ a iſt ⊓, dem ∠ b (nemlich beyde rechte)
Dahero werden die Seiten, welche die gleiche Winckeln d. 14. 6.
a. und b beſchlieſſen, widerkehrt geproportionirt ſeyn, und ſtehen AB. GF :: FE. BC. das iſt, die vier Linien AB. GF. FE. BC. ſeint einander geproportionirt.
Welches zu beweiſen ware.



Die XVII. Vorgab. Betrachtung.

Wann drey gerade Linien geproportionirt ſeynd: ſo iſt das Winckelrechte Parallelogram, welches von denen zwey äuſſerſten Linien iſt zuſammen geſetzt werden, gleich dem Quadrat, welches auff der mittlern Linie iſt beſchrieben worden; und hinwiederumb, wann das winckelrechte Parallelogram, ſo von denen zwey äuſſerſten Linien gemacht wird, gleich iſt, dem Quadrat, welches auf der mitlern Linie iſt beſchrieben worden: ſo ſeynd die drey Linien geproportionirt.

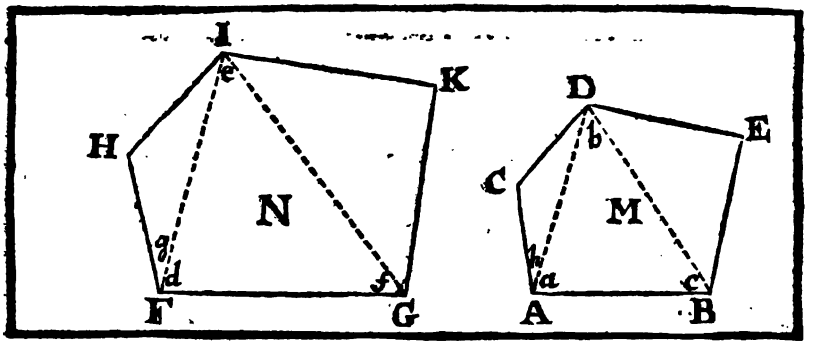
Es ſeint gegeben die drey geproportionirte Linien, das iſt AB. EF :: EF. CB. Wann man nun von denen zwey äuſſerſten AB, und CB, ein winckelrechtes ▭, gleich wie AC machet, und auch ein □ auff der mittlern Linie EF, ſo ſaget man dieſem nach, daß das □ EG, und das ▭ AC einen gleichen Inhalt haben.

Zubereitung. Nehme die Linie FG ⊓ der Linie EF.

Beweiß. I. Die vier Linien AB. EF. FG. CB. ſeint geproportionirt — ſ. d. Vorg. und Zub.
das iſt AB. EF :: FG CD.
Dahero wird das winckelrechte ▭ AC ⊓ ſeyn, dem ▭ EG. — d. 16. 6.
die mittlere Linien EF, und FG ſeint aber einander ⊓ gemacht:
Darum wird das ▭ EG ein □ ſeyn.
Und folgends, das ▭ AC ⊓ ſeyn, dem □ EG.
Welches zum erſten zu beweiſen ware.

II. Es ſeynd gegeben die zwey winckelrechte ▭, nemlich das ▭ AC, und das □ EG, welche gleichen Inhalt begreiffen: Dieſem nach ſaget man, daß ihre Seiten, oder die drey Linien AB. EF. CB, auß welchen zwey äuſſerſten das ▭ AC, und auß der mitlern das □ EG gemacht worden iſt, geproportionirt ſeint. Das iſt, AB, EF :: EF (oder die gleiche FG), CB.

Beweiß. Weilen beyde ▭ AC, und EG rechtwincklicht ſeynd, — d. d. Vorg.
und das ▭ AC ⊓, dem ▭ EG. — d. d. Vorg.
So werden deßwegen ihre Seiten widerkehrlich geproportionirt ſeyn, — d. 14. 6.
nemlich AB. EF :: FG. CB.
Es iſt aber EF ⊓ der FG (wegen Machung deß □)
Dahero wird auch ſeyn AB. EF :: EF. CB.
Welches zu beweiſen ware.



Die XVIII. Vorgab. Handgriff.

Auff einer vorgegebenen geraden Linie eine geradtliniſche Figur zu machen, ſo einer andern vorgegebenen geradtliniſchen Figur gleichförmig, und gleicher Weiſe geſtölt ſeye.

Es iſt gegeben die gerade Linie AB, auff welcher man eine Figur, als wie M, gleichförmig, und gleichgeſtölter der gegebenen Figur N machen ſolte.

Handgriff. Auß einem ∠ nach Gefallen, in der Figur N, ziehe ſo viel gerade Linien, als nöthig ſeynd, in die übrige ∠: als wie hier aus dem ∠ I in die zwey ∠ F und G. ſo wird die Figur N in die drey △ FHI. FIG. GKI. abgetheilt worden ſeyn.

Mache auff der Linie AB den ∠ a ⊓, dem ∠ d.
und den ∠ c ⊓, dem ∠ f. d. 23. 1.

Unterdeſſen werden die fortgezogenen Linien AD, und BD nothwendig in einen Punct, als wie hier in D, zuſammen lauffen, und den ∠ b in dem △ ADB. ⊓ machen, dem ∠ e in dem △ FIG. d. 32. 1.
Und folgends wird der △ ADB gleichförmig ſeyn, dem △ FIG. d. 4. 6.

Hernach mache auff eben dieſe Weiſe auff der Linie AD,
den △ ACD gleichwincklicht dem △ FHI.
und auff BD, den △ BED gleichwincklicht dem △ GKI.

So werden beyde △ ACD, und BED auch gleichförmig ſeyn, denen zwey △ FHI, und GKI;
Und folgends die gantze Figur M wird hierdurch gleichförmig werden, der gegebenen Figur N.

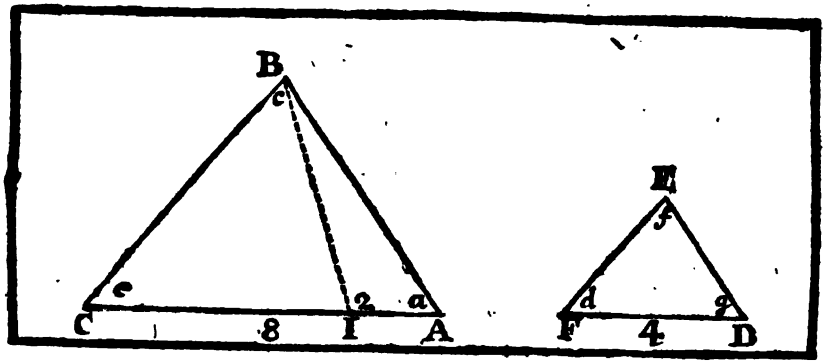
Beweiß. Alle △ der Figur M ſeint gleichförmig gemacht, und gleich geſtölt worden, allen △ der Figur N. Zu einem Exempel, d. d. Hand.
Als wie der △ ADB, iſt gleichförmig gemacht worden, dem △ FIG,
und der △ ACD gleichformig, dem △ FHI. u. ſ. f.

Dahero wird ſich verhalten CA. AD :: HF. FI. d. 4. 6.
und AD. AB :: FI. FG.
und auß einer Gleichheit CA. AB :: HF. FG, d. 22. 6.

Das iſt, die Seiten CA und AB umb den ∠ h + a
in der Figur M, ſeint gleichförmig, denen gleichförmig ſhaltnuſſagenden Seiten HF, und FG umb den gleichen ∠ g + d, in der Figur N. d. 1. def. 6

Auff ſolche Beweiß-Art werden auch die übrige Seiten, und folgends die gantze Figur M gleichförmig und gleichgeſtölter der Figur N, bewieſen.

Welches zu machen ware.



Die XIX. Vorgab.

Betrachtung.

Gleichförmige Triangeln ſtehen gegen einander in zweymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß ſagenden Seiten.

Es ſeint gegeben die zwey gleichformige △ ABC, und DEF. in welchen nemlich iſt BA. AC :: ED. DF, und AC. CB :: DF. FE. Letztlich CB. BA :: FE. ED. und der ∠ a ⊓, dem ∠ g. der ∠ c ⊓, dem ∠ f. Letztlich der ∠ d ⊓, dem ∠ e.

Dieſem nach ſaget man, daß ſich der △ ABC, zu dem △ DEF in zweymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-ſagender Seiten, zu einem Exempel deren Seiten AC, und DF, verhalte.

Was aber eine zweymahlige Verhaltnuß genandt wird, und ſeye, iſt in der 10. def. deß 5. Buchs ſchon außgelegt worden.

Wann dahero die Gröſſen AC, und DF ſtäts proportionirlich in drey Abſätze fortgeführt werden: ſo wird demnach bewieſen, daß der △ ABC, zu dem △ DEF ſich verhalte, gleich wie der erſte Abſatz zu dem dritten. Seyen zu einer Erleuterung die zwey gleichförmig-haltnuß-ſagende Seite, AC von 8. Schuhen, und DF von vier Schuhen lang gegeben. Wann man nun dieſelbe in dreyen Abſätzen ſtäts proportionirlich fortführet, ſo wird es ſtehen 8. 4. 2.

Nunmehro wird in dieſer Vorgab bewieſen, daß ſich der △ ABC zu dem △ DEF verhalte, gleich wie 8 zu 2 (oder kürtzer) 4 zu 1.

Zubereitung.

Suche zu denen zwey Linien AC, und DF die dritte proportional-Linie AI, daß es ſeye AC. DF :: DF. AI. d. 11. 6.

Hange I. B. zuſammen.

Beweiß.

Es iſt gegeben BA. AC :: ED. DF. d. d. Vorg.

So wird auch durch die Verwexlung ſeyn BA. ED :: AC. DF. d. 16. 5.

Es iſt aber gemacht worden AC. DF :: DF. AI. d. d. Zub.

Dahero wird auch ſeyn BA. ED :: DF. AI. d. 11. 5.

Das iſt, die △ ABI, und DEF haben ihre Seiten widerkehrt geproportionirter. d. 2. def. 6.

Weilen auch der ∠ a ⊓ gegen iſt, dem ∠ g. d. d. Vorg.

So folget, daß der △ ABI ⊓ ſeye, dem △ DEF. d. 15. 6.

und dahero ein Ding iſt, der △ ABC. △ DEF:: △ ABC. △ ABI, d. 7. 5.

Es iſt aber der △ ABC. △ ABI:: Baſis AC. Baſis AI. d. 1. 6.

Deßwegen auch ſeyn wird der △ ABC. △ DEF:: Baſis AC. Baſis AI.

Unterdeſſen ſtehet AC zu AI in zweymahliger Verhaltnuß derſelben, ſo zwiſchen der erſten AC, und der anderten DF iſt. (dann die drey Linien AC. DF, und AI, ſeind ſtets geproportionirt worden.) d. 10. def. 5. d. d. Zuſ.

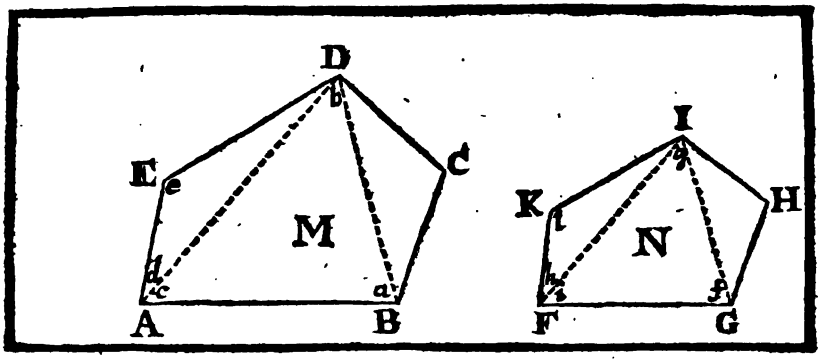
So folget, daß auch der △ ABC zu dem △ DEF in zweymahliger Verhaltnuß, der gleichförmig-haltnuß ſagenden Seiten AC. und DF ſtehe.

Welches zu beweiſen ware.

Folge.

Wann drey gerade Linien ſtets geproportionirt gegeben werden, als wie AC. DF:: AI; So ſeye, gleich wie die erſte Linie AC ſich zu der dritten AI verhalte: alſo wird ſich verhalten ein △ auff der erſten AC, zu dem △, welcher gleichförmig, und gleicher Weiſe auff der anderten Linie DF iſt gemacht worden.

Das iſt AC. AI:: △ ABC. △ DEF.



Die XX. Vorgab. Betrachtung.

Gleichförmige Viel-Ecke werden in Triangeln von gleicher Anzahl abgetheilt, welche unter sich gleichförmig, und mit ihren gantzen Figuren geproportionirt seint; so stehen auch gleichförmige Viel-Eck gegen einander in zweymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten.

Es seint gegeben die gleichförmige Viel-Ecke M, und N. So sagt man:

1. Daß das Viel-Eck M in so viel △, als das Viel-Eck N hat, kan abgetheilt werden.
2. Daß ein jeder △ deß Viel-Ecks M gleichförmig seye, einem jeden △ in dem Viel-Eck N. zu einem Exempel, daß der △ DEA gleichförmig seye, dem △ IKF, und der △ ADB gleichförmig dem △ FIG, und der △ BCD dem △ GHI.
3. Daß diese △ zu ihren gantzen Figuren geproportionirt seyn, nemlich, daß, wie sich ein △ zu seinen gleichförmigen verhalte, also seye ein Viel-Eck zu dem andern.
4. Daß ein Viel-Eck zu dem andern gleichförmigen, in zweymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten, zu einem Exempel der Seiten AB zu der Seiten FG, stehe.

Beweiß.

Ziehe vorhero auß den en gleichen ∠ D und I in die übrigen ∠, so viel gerade Linien, als du kanst, als wie DA. DB, und IF. IG.

I. Weilen nun die Anzahl deren ∠ in dem Viel-Eck M. ☐ ist, der Anzahl deren ∠ in dem Viel-Eck N. d. d. Vorg.
So ist klar, daß auch die Anzahl deren △ in beyden Viel-Ecken einander ☐ seint.

II. In dem △ DEA ist der ∠ e ☐, dem ∠ i. in dem △ IKF. d. 1. def. 6.
Und die Seiten DE ist zu der Seiten EA, als wie IK. zu KF.
Dahero wird der △ DEA gleichförmig und gleichwincklicht seyn, dem △ IKF. d. 6. 6.
Auff solche Weise ist auch der △ BCD gleichförmig und wincklicht dem △ GHI.

In denen △ ADB; und FIG aber, weilen der ∠ d + c ☐ ist dem ∠ h + i. d. 1. def. 6.
Wann man nun beyderseits die gleiche ∠ d und h darvon ziehet,
So wird der ∠ c ☐ verbleiben, dem ∠ i.

Auff ſolche Weiſe wird auch der ∠ a □ ſeyn, dem ∠ f.

Worauß man ſchlieſſet, daß auch letztlich die zwey △ ADB, und FIG gleichwincklicht, und folgends auch gleichförmig einander ſeint. d. 32. Cor. 1. d. 4. 6.

III. Weilen der △ DEA gleichförmig iſt, dem △ IKF. d. d. Vorg.
ſo wird der △ DEA zu dem △ IKF in zweymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-ſagenden Seite, nemlich EA zu KF. ſtehen. d. 19. 6.

Unterdeſſen iſt EA. AB :: KF. FG. d. d. Vorg.
und durch die Verwexlung EA. KF. :: AB. FG. d. 16. 5.

Deßwegen iſt die zweymahlige Verhaltnuß EA zu KF, und AB zu GF einerley,
und iſt folgends der △ DEA, zu dem △ IKF auch in zweymahliger Verhaltnuß der Seiten AB, zu der Seiten FG.

Auß den vorgehenden iſt auch der △ ADB gleichförmig dem △ FIG.
Darumb auch der △ ADB zu dem △ FIG in zweymahliger Verhaltnuß derenſelben Seiten AB zu FG ſeyn werde. d. 19. 6.

Und ſchließlich wird ſeyn der △ DEA. △ IKF :: △ ADB. △ FIG.

Auff ſolche Weiſe iſt erſtlich der △ BCD zu dem △ GHI, gleich wie der △ ADB, zu dem △ FIG; oder der △ DEA zu dem △ IKF, auch in zweymahliger Verhaltnuß derer Seiten AB zu FG.

Haben alſo alle vorgehende △ zu ihren nachgehenden △ einerley Verhaltnuß.
Und deßwegen wird ſeyn, daß, gleich wie ein △ deß Viel-Ecks M ſich zu ſeinen gleichförmigen △ in dem Viel-Eck N. verhaltet:
alſo verhalten ſich alle △ ſammentlich deß einen Viel-Ecks zu allen △ ſammentlich des andern Viel-Ecks, das iſt, als wie das gantze Viel-Eck M zu dem gantzen Viel-Eck N. d. 12. 5.

IV. Nachdeme bewieſen worden iſt, daß ſich das eine Viel-Eck M. zu dem andern Viel-Eck N verhalte, gleich wie ein △ deß einen Viel-Ecks, zu dem gleichförmigen △ deß andern.

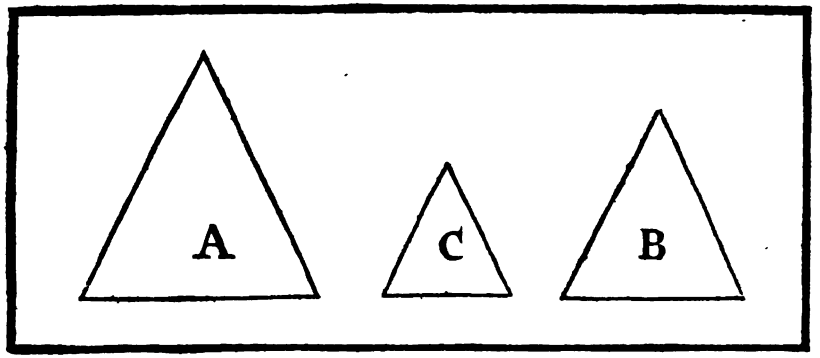
Entzwiſchen aber ein jeder △ zu ſeinem gleichförmigen △ in zweymahliger Verhaltnuß der Seiten AB zu der Seiten FG ſeye, iſt bewieſen worden.

So wird endlich geſchloſſen, daß auch das Viel-Eck M zu dem Viel-Eck N in zweymahliger Verhaltnuß der Seiten AB zu der Seiten FG iſt.

Welches zu beweiſen ware.

Folge.

Wann drey gerade Linien ſtets geproportionirt ſeint, ſo wird ſeyn, gleich wie ſich die erſte Linie zu der dritten verhalte, alſo verhalte ſich die Figur, welche auff der erſten Linie iſt beſchrieben worden, zu der Figur, welche gleichförmig und geſtalter auff der andern Linie iſt gemacht worden.



Die XXI. Vorgab.

Betrachtung.

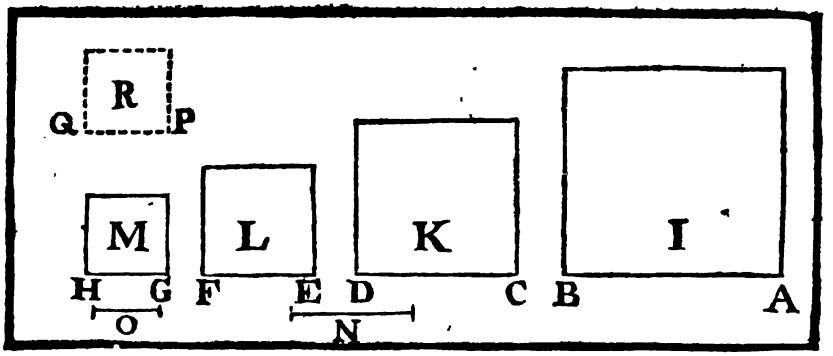
Die geradt-liniſche Figuren, welche einer andern geradt-liniſchen Figur gleichförmig ſeint, die ſeint auch unter einander gleichförmig.

Es ſeint gegeben die Figuren A, und B beyde gleichförmig der Figur C.
Dieſem nach ſaget man, daß die Figur A und B auch einander gleichförmig ſeint.

Beweiß.

Weilen die Figur A gleichförmig iſt, der Figur C. d. d. Vorg.
So werden die ∠ der Figur A ☐ ſeyn, denen ∠ der Figur C. d. 1. def. 6.
Jmgleichen, weilen die Figur B gleichförmig iſt der Figur C.
So werden die Winckel der Figur B ☐ ſeyn, denen ∠ der Figur C.
Und folgends die ∠ der Figur A ☐, denen ∠ der Figur B. d. 1. ax. 1.
Ferner indeme die Figur A gleichförmig iſt der Figur C.
So werden die Seiten umb denen ∠ der Figur B geproportionirt ſeyn, denen Seiten umb denen gleichen ∠. der Figur C. d. 1. def. 6.
Auff ſolche Weiſe, weilen die Figur B gleichförmig iſt, der Figur C.
So werden die Seiten umb denen ∠ der Figur B geproportionirt ſeyn, denen Seiten umb denen gleichen ∠ der Figur C.
Und folgends die Seiten umb denen ∠ der Figur A geproportionirt, denen Seiten, umb denen Winckeln der Figur B.
Dahero iſt die Figur A gleichförmig der Figur B. d. 1. def. 6.
und folgends alle drey Figuren A. B. C. einander gleichförmig. d. 1. ax. 1.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXII. Vorgab. Betrachtung.

Wann vier Linien geproportionirt ſeynd, und auff ſolchen gleichförmige, und gleichgeſtellte Figuren gemacht werden: So werden auch ſolche geproportionirt ſeyn: und wann auff vier Linien gleichförmige geradtliniſche Figuren gemacht ſeint, ſo werden ſolche vier Linien geproportionirt ſeyn.

Es ſeint gegeben die vier geproportionirte Linien, nemlich AB. CD:: EF. GH. Dieſem nach ſaget man, daß, wann vier gleichförmige, und gleichgeſtellte Figuren, gleich wie I. K. L. M. darauff gemacht werden, auch ſolche geproportionirt ſeyn. I. K :: L. M.

Zubereitung.

Mache AB. CD:: CD. N, und EF. GH:: GH. O.
Daß alſo ſeye AB. CD:: EF. GH, und CD. N:: GH. O. } d. 11. 6.
So wird aus dergleichen ſeyn AB. N:: EF. O. hernach d. 22. 5.

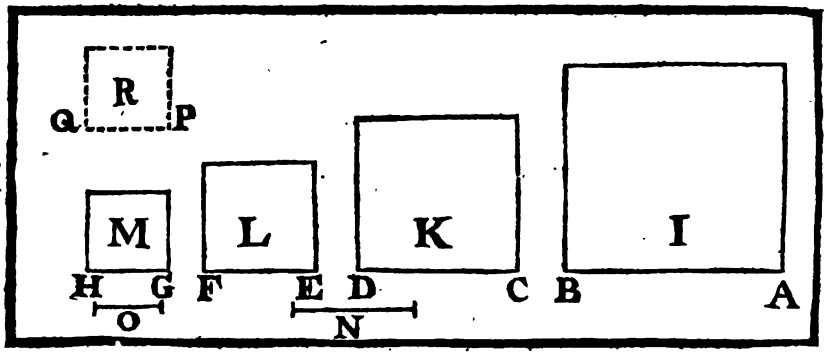
Beweiß.

Weilen gemacht iſt AB. CD:: CD. N.
So iſt, als wie die erſte AB, zu der dritten N:: die Figur I zu der Figur K. d. 20. Cor. 6.
Weilen abermahlen gemacht iſt EF GH:: GH. O.
So iſt auch, als wie die erſte EF. zu der dritten O :: die Figur L zu der M.

Unterdeſſen iſt AB. N:: EF. O. { d. d. Vorg. und Zub.
Dahero ſeyn werde die Figur I. K :: L. M. d. 11. 5.
Welches das erſte zu beweiſen ware.

II.

Wann entgegen auff denen gegebenen geraden Linien AB. CD. EF. und GH, die vier darauff gleichförmig- und gleichgeſtellte Figuren I. K. L. M. einander geproportionirt ſeint: ſo ſaget man, daß alſo auch ſolche vier Linien geproportionirt ſeynd, nemlich AB. CD:: EF. GH.



Zubereitung.

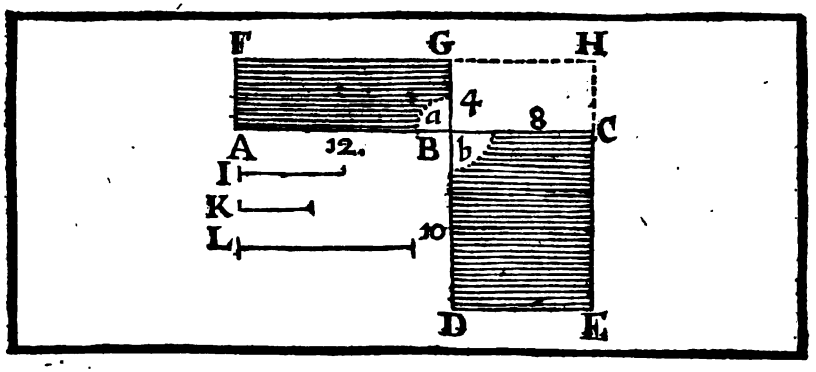
Mache AB. CD :: EF. PQ. d. 12. 6.
Schreibe auff PQ die Figur R gleichförmig, und gleichgeſtelter der Figur L, welche auch deßwegen der Figur M gleichförmig und geſtellter ſeyn werde. Alsdann d. 21. 6.

Beweiß.

Weilen die vier Linien AB. CD. EF. PQ. geproportionirt ſeynd:
So wird durch das vorgehende ſeyn I. K :: L. R.
Es verhalte ſich aber I. K :: L. M. d. d. Vorg.
Dahero wird ſeyn L. R :: L. M. d. 11. 5.
und folgends wird R. □ ſeyn der M. d. 9. 5.
Wegen der Gleichförmigkeit aber und Gleichſtellung deren Figuren R und M werde auch nothwendig die Linie PQ □ ſeyn müſſen, der Linie GH.
und deßwegen ſeyn FF. PQ :: EF. GH. d. 7. 5.
Unterdeſſen iſt AB. CD :: EF. PQ. d. d. Zub.
Dahero wird auch ſeyn AB. CD :: EF. GH. d. 11. 5.
Welches zu beweiſen ware.

Anmerkung.

Man mag auff denen erſten zwo geproportionirten Linien AB, und CD gantz eine andere Gattung von Figuren, als auff denen zwey letztern geproportionirten Linien EF und GH, ſtellen; allein iſt diß hierinnen zu beobachten, daß die zwey erſte Figuren einander gleichförmig und gleichgeſtellter ſeynd, gleich wie auch die zwey letztere Figuren einander gleichförmig, und gleichgeſtellter ſeyn müſſen. Zu einem Exempel, es können auff AB, und CD zwey △, auff denen EF, und GH zwey ⌞ gemacht werden, und ſo fort: Der Beweiß hernach iſt gleich dem Vorgehenden in dieſer Vorgab.



Die XXIII. Vorgab. Betrachtung.

Gleichwincklichte Parallelogrammen halten ſich gegen einander in zuſammengeſetzter Verhaltnuß ihrer Seiten.

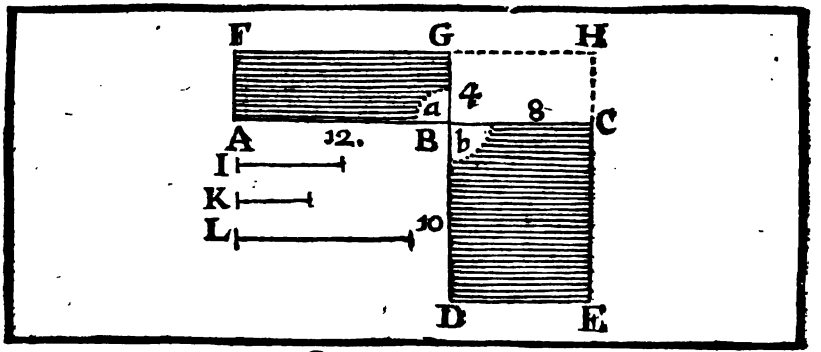
Es ſeint gegeben die zwey gleichwincklichte □ AG, und BE. Dieſem nach ſaget man, daß das □ AG, zu dem □ BE in zuſammengeſetzter Verhaltnuß ſtehe, ihrer Seiten AB zu BC, und BG zu BD, oder AB zu BD, und GB zu BC, welche umb die gleichen ∠ a, und b ſeint; Mercke hiebey, daß die zwey vorgehende in dem einen, und die zwey nachgehende in dem andern □ ſich einfinden müſſen. Alſo wird ſeyn

$$\frac{AB}{BC} \frac{GB}{BD} :: \square AG. \square BE.$$
$$\frac{AB}{BD} \frac{GB}{BC}$$

Was unterdeſſen eine zuſammengeſetzte Verhaltnuß genannt wird, und ſeye, iſt ſchon in der 5. Wort-Erklärung dieſes Buchs ausgelegt worden. Seye demnach zu beſſerer Verſtändnuß gegeben, daß erſtlich die zwey □ rechtwincklicht, und hernach die Seiten AB von 12, und BG von 4; die Seiten BC aber von 8, und BD von 10 Schuhe lang ſeyen: ſo iſt klar, daß die Gröſſe der Verhaltnuß, oder der Nenner der Seiten AB 12 zu der Seiten BC 8 ($1\frac{1}{2}$); und BG 4, zu BD 10 ($\frac{2}{5}$) ſeye.

Wanndann dieſe zwey Nenner, oder Gröſſen deren Verhaltnuſſe $1\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{5}$, einer durch den andern ordentlich vermehret wird, ſo krieget man letztlich eine neue Gröſſe, oder Nenner der Verhaltnuß $\frac{3}{5}$, das iſt, unten eins und zwey drittheil übertheilend, welche die zuſammengeſetzte Verhaltnuß der Seiten iſt, und wird demnach ſeyn, als wie 3 zu 5:: □ AG □ BE, nemlich das □ AG iſt in unten ein- und zwey drittheil-übertheilender Verhaltnuß gegen dem □ BE. Wird Kürtze halber alſo gedeutet:

$$\frac{AB.}{BC} \frac{GB}{BD} :: \square AG. \square BE. \text{ oder ſo ein Ding } \frac{AB.}{BD} \frac{GB}{BC} :: \square AG. \square BE.$$



Zubereitung.

Stoſſe beyde □ AG, und BE ſolcher geſtalt zuſammen, daß ABC eine gerade Linie ſeye, und die gleiche ∠ a, und b gegen einander über zu ſtehen kommen.

Verlängere FG, und EC, biß ſie in einem Punct, als wie in H, zuſammen lauffen, und das □ BH geſtalten.

Hernach, weilen die Seiten AB, zu BC, und GB zu BD nicht ſtets nach einander geſetzte Gröſſen ſeint: ſo mache, wie es in der Auslegung über die 5. Wort-Erklärung dieſes Buchs iſt gelehret worden, daß nemlich andere Gröſſen an ſtatt deren AB zu BC, und GB zu BD ſtets nach einander gehendt, welche dieſelbe Verhaltnuß haben, geſucht werden. Das iſt,

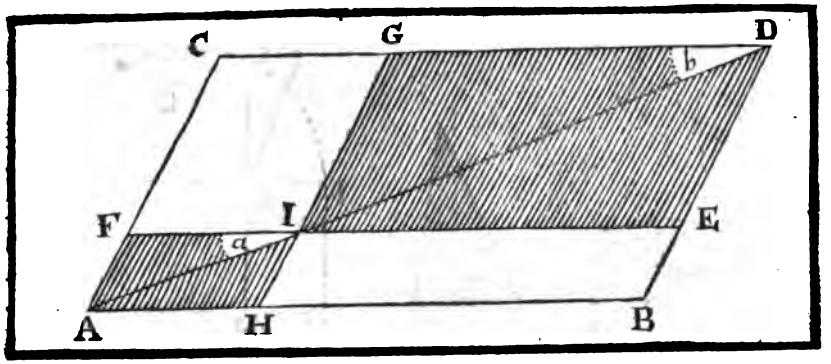
Man nehme nach Gefallen die gerade Linie I. und mache
AB zu BC :: I. zu einer andern, nemlich zu K. d. 12. 6.
Abermahlen mache GB. BD :: K. L. nunmehro

Beweiß.

Als wie ſich verhaltet AB zu BC :: □ AG. □ BH. d. 1. 6.
Es iſt aber gemacht worden AB. BC :: I. K. d. d. Zuß.
Dahero wie ſich auch verhaltet I. K :: □ AG. □ BH.
Wiederumb, als wie iſt GB. BD :: □ BH. □ BE. d. 1. 6.
Es iſt auch gemacht worden GB. BD :: K. L. d. d. Zuß.
Folget, daß auch ſeye K. L :: □ BH □ BE.
Weilen dann iſt I. K :: □ AG. □ BH.
und K. L :: □ BH. □ BE.
So iſt durch die Gleichheit I. L :: □ AG. □ BE. d. 22. 5.
Unterdeſſen iſt I zu L auß denen Gröſſen deren Verhaltnuſſen I zu K, und K zu L, (welche gleichförmig ſeint denen Verhaltnüſſen AB, zu BC, und GB zu BD) zuſammen geſetzt. [d. d. Zuß. u. 5. def. 6.

Folget letztlich, daß auch die Gröſſe, oder Nenner der Verhaltnuß deß □ AG zu dem □ BE zuſammen geſetzt ſeye, auß denen Gröſſen oder Nenner der Verhaltnuſſe deren Seiten AB zu BC, und GB zu BD. Und dahero ſeye.
als wie $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{GB}{BD}$ :: □ AG. □ BE. u. ſ. f.

Welches zu beweiſen ware.



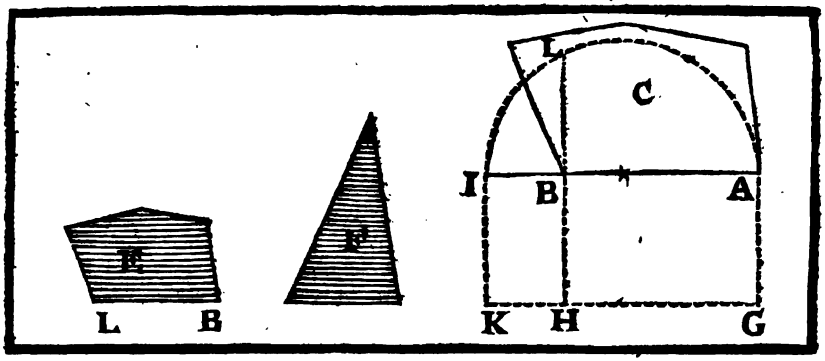
Die XXIV. Vorgab. Betrachtung.

In einem jeden Parallelogram ſeint die Parallelogrammen, welche umb den Diameter ſtehen, dem gantzen und auch unter ſich ſelbſten einander gleichförmig.

Es iſt gegeben das □ ABCD, in welchem der Diameter AD, auß deſſen Punct, als wie I, ſo darauff nach Gefallen genommen iſt, ſeynd die zwey gerade Linien EIF, und GIH ═, denen Seiten AHB, und CFA gezogen, und hierdurch die zwey □ AI, und ID, ſo umb den Diameter AD ſtehen, geſtaltet worden: Dieſem nach ſaget man, daß dieſe zwey □ AI, und ID nicht allein dem gantzen □ ABCD, ſondern auch unter ſich ſelbſt gleichförmig ſeint.

Beweiß.

Weilen in dem △ CDA, die GI ═ iſt, der CA. — d. d. Vorg.
ſo wird ſeyn DG GC:: DI. IA. — d. 2. 6.
Und durch die Zuſammenſetzung DG + GC. GC:: DI + IA. IA. — d. 18. 5.
Und durch die Verwexlung DG + GC DI + IA:: GC. IA. — d. 16. 5.
GG iſt aber □, der IF, wegen der gleichen ═ CF. GI. — d. 23. 1.
Dahero wird mit einem Wort ſeyn DC. DA:: IF. IA. — d. 14. ax. 1.
unterdeſſen iſt der ∠ b □ dem ∠ a (der äuſſere, dem innern). — d. 29. 1.
Folget deßwegen, daß der △ CDA gleichförmig ſeye, dem △ FIA. — ſd. 6. 6. und 4. 6.
Abermahlen wird es ſeyn in dem △ CDA wegen der ═ GI. CA. — d. 2. 6.
DG GC:: DI. IA.
Und durch die Verkehrung CG. GD:: AI. ID. — d. 4. 5.
und durch die Zuſammenſetzung CG + GD. GD:: AI + ID. ID. — d. 18. 5.
Und durch die Verwexlung CG + GD. AI + ID:: GD. ID. — d. 16. 5.
(das iſt mit einem Wort DC. DA:: DG. DI.) — d. 14. ax. 1.
Unterdeſſen iſt der ∠ b beyden △ CDA, und GDI. gemein.
Dahero ſeynd beyde △ CDA, und GDI einander, und letzlich alle drey △ CDA. FIA. GDI. unter ſich gleichförmig. — { d. 6. 6. und 4. 6. d. 11. 5.
Es ſeint aber die △ CDA. FIA. GDI gerad die Helfften deren □ AD. AI. ID. — d. 34. 1.
Darumb auch die □ AD. AI. ID. einander gleichförmig ſeyn werden. — d. 15. 5.
Welches zu beweiſen ware.



Die XXV. Vorgab.

Handgriff.

Einer vorgegebenen geradtliniſchen Figur (C) eine andere gleichförmige und gleichgeſtellte Figur (E) zu machen, welche gleich groß ſeye einer andern vorgegebenen geradtliniſchen Figur (F).

Handgriff.

Mache auff einer Seiten, als wie auff AB der Figur C, das ▭ AH ⌐ der vorgegebenen Figur C: und an der andern Seiten BH in der geraden Linie AB fort, mache das ▭ BK ⌐ der Figur F. d. 45. 1. d. 44. 1.

Suche zwiſchen AB, und BI, die mittlere Proportional-Linie BL. d. 13. 6.

Nehme BL, und mache darauff die Figur E gleichförmig, und gleichgeſtellter der Figur C, welches das erſte iſt, ſo man verlanget; hernach beweiſet man, daß auch E und F gleichen Inhalt haben. d. 18. 6.

Beweiß.

Die Linien AB. BL. BI. ſeint ſtets geproportionirt, d. d. Hand.

Dahero wie die erſte Linie AB ſich zu der dritten BI verhaltet: d. 20. Cor. 6.

Alſo iſt die Figur C auff der erſten Linie, zu der Figur E, welche auff der anderten BL iſt gemacht worden.

Das iſt, es werde ſeyn AB. BI:: C. E.

Es iſt aber AB. BI:: ▭ AH (oder die gleichgroſſe Figur C) d. 1. 6.

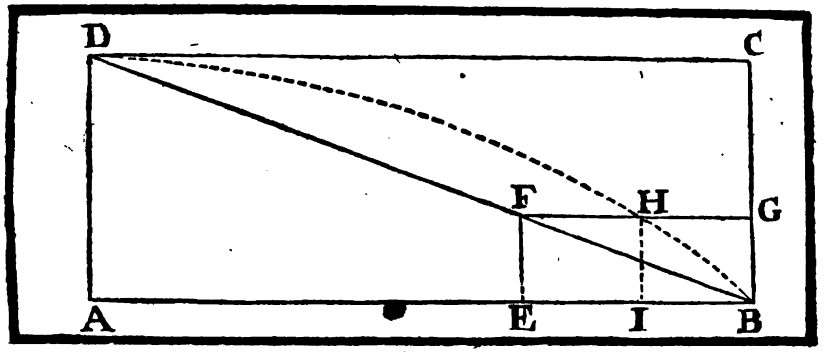
Zu dem ▭ BK (oder der gleich groſſen Figur F.) u. Hand.

Das iſt AB. BI:: C. F.

Dahero wird auch ſeyn C. E:: C. F. d. 11. 5.

Und folgends wird die Figur E ⌐ ſeyn, der Figur F. d. 9. 5.

Welches zu machen ware.



Die XXVI. Vorgab. Betrachtung.

Wann von einem Parallelogram, ein anders gleichförmiges, und gleichgeſtelltes abgezogen wird, welches einen gemeinen Winckel mit dem erſten hat, ſo wird ein ſolches abgezogenes Parallelogram völlig umb den Diameter ſtehen.

Es iſt gegeben, daß man von dem □ ABCD das □ EG (ſo ihme gleichförmig, und gleichgeſtellter ware, und den ∠ EBG mit einander gemein hatten, abgezogen habe: Dieſem nach ſaget man, daß das □ EG umb den Diameter deß gantzen □ AC ſtehe, das iſt, wann man eine gerade Linie auß D in B ziehe, auch durch den Punct F gehe.

Beweiß.

Wann es nicht geglaubt, ſondern vorgebracht wird, daß eine ſolche Linie durch einen andern, als den Punct F, gehe (ſo ſeye, wann es möglich iſt) daß ſie durch den Punct H gehe, gleich wie DHB.

Ziehe darauff die Linie HM ═, der Linie CB: : ſo wird hierdurch dieſes □ IG umb den Diameter deß □ AC ſtehen müſſen.

Und wegen deß gemeinen Winckels IBG,

das □ IG gleichförmig ſeyn, dem □ AC. d. 24. 6.

Das iſt, es ſolte ſich verhalten BG. GH : : BC. CD. d. 1. def. 6.

Es verhaltet ſich aber BG. GF : : BC. CD.

(dann das □ EG iſt gleichförmig gemacht worden dem □ AC) d. d. Vorg.

Darumb wird ſich verhalten müſſen BG GH : : BG. GF. d. 11. 5.

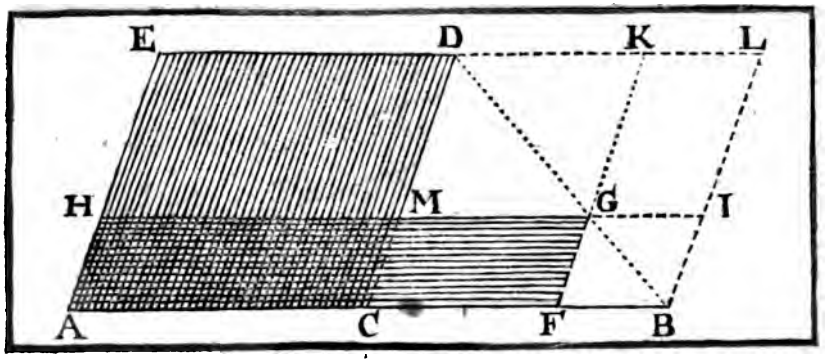
und deßwegen muß GH □ ſeyn, der GF. d. 9. 5.

Ein Theil ſeinem gantzen, ſo ungereimt iſt.

Worauß man ſchlieſſet, daß eine gerade Linie, ſo aus dem Punct D in B gezogen wird, bloß durch den Punct F. und nicht anderwertig durchgehe.

Und folgends, daß das □ EG völlig umb den Diameter DFB deß □ AC ſtehen müſſe.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXVII. Vorgab.

Betrachtung.

Unter allen Parallelogrammen, welche auff einer geraden Linie geſtellt werden, und ihre Abgänge gleichförmig und gleich geſtölter haben dem Abgang, ſo auff der geraden Linie iſt beſchrieben worden, iſt das gröſte, welches auff der andern Helffte der geraden Linie, gleichförmig ihrem Abgang iſt geſtölt worden.

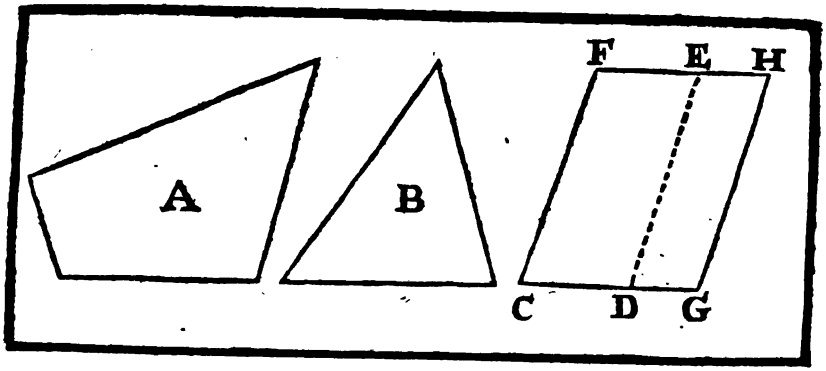
Es iſt gegeben das abgehende □ AD, welches auff der Helffte der Linie AB iſt geſtölt worden, nemlich auff AC, deſſen Abgang aber (nach der 6 def. 6.) ſeyn werde das □ CL, welches auff der andern Helffte der Linie AB, nemlich auff CB, iſt beſchrieben worden. Es iſt auch gegeben das nach Gefallen gemachte □ AG, welches auff dem ungleichen Theil AF der Linie AB iſt geſtölt worden, und ſeinen Abgang FI gleichförmig, und gleichgeſtölter dem Abgang CL. hat. Dieſem nach ſaget man, daß das □ AD ⌐ ſeye, als das □ AG. u. ſ. f.

Zubereitung.

Ziehe den Diameter DB, welcher auch nothwendig durch das □ FI gehen werde: dann beyde □ CL, und FI einander gleichförmig, und gleich geſtölter gegeben werden) d. 26. 6.
Hernach verlängere FG biß in K.

Beweiß.

In dem □ CL iſt das □ CG ⌐, dem □ GL. d. 43. 1.
Wann man das gemeine □ FI beyderſeits hinzu ſetzet:
So wird das □ CI ⌐ ſeyn, dem □ FL.



Das □ CI aber, iſt ⌐, dem □ AM. d. 36. 1.

Dahero iſt auch das □ AM ⌐, dem □ FL.

Setze abermahlen hinzu das gemeine □ CG.

So iſt das □ AG ⌐, dem Winckelhaben CGL.

Unterdeſſen iſt klar, daß das gantze □ CL ⌜ ſeye, als der Winckelhacken CGL, oder das gleiche □ AG.

Folget, daß auch das □ AD (welches ⌐ iſt, dem □ CL). d. 36. 1.
⌜ ſeye, als das □ AG.

Welches zu beweiſen ware.

Hülffe. (Lemma.)

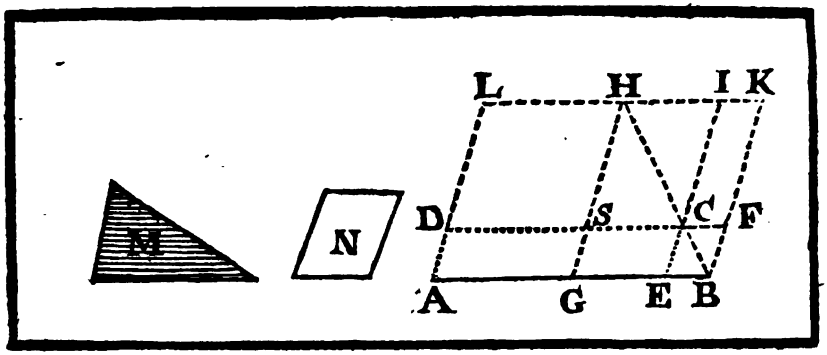
Den Unterſcheidt zwiſchen zwey geradtliniſchen Figuren zu erfahren, umb welchen eine die andere übertreffe, oder gröſſer ſeye.

Es ſeynd gegeben die Figuren A und B, unter welchen A die gröſſere, und B die kleinere iſt. Dieſem nach verlanget man, umb wie viel die gröſſere A, die kleinere B übertreffe.

Mache das □ CH ⌐, der Figur A. d. 45. 1.

Hernach auff der Seiten FC, und in gleichen Winckeln
mache das □ CE ⌐, der Figur B. d. 43. 1.

So iſt klar, daß das □ DH der Unterſcheid ſeye,
umb welchen die Figur A ⌜ iſt, als die Figur B.



Die XXVIII. Vorgab.

Handgriff.

Auff einer vorgegebenen geraden Linie ein abgehendes Parallelogram zu stöhlen, welches gleich groß seye einer andern vorgegebenen geradtliniſchen Figur, und ihren Abgang gleichförmig einem andern gegebenen Parallelogram habe; jedoch iſt zu beobachten, daß die gegebene geradtliniſche Figur nicht gröſſer seye, als das Parallelogram, welches auff der Helffte der vorgegebenen Linie gleichförmig seinem Abgang iſt geſtölt worden.

Es seynd gegeben die gerade Linie AB, die geradtliniſche Figur M, und das ▭ N. Doch die Figur M muß nicht ⌜ seyn, als das ▭ AH, welches auff der Helffte AG der gegebenen Linie AB, gleichförmig seinem Abgang GK, oder dem ▭ N iſt geſtölt worden. Dieſem nach verlanget man ein abgehendes ▭, als wie AC, auff der Linie AB geſtölter zu haben, welches gleich groß seye der Figur M, und den Abgang EF, gleichförmig habe dem ▭ N.

Handgriff.

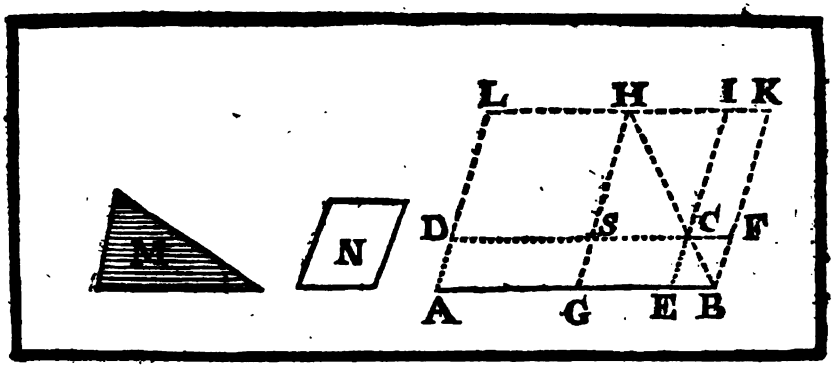
Auff der Helffte GB der gegebenen Linie AB, mache das ▭ GK gleichförmig, dem gegebenen ▭ N. d. 18. 6.

Hernach erfulle auff der Linie AB, das ▭ AK, wodurch daß ▭ AH, das abgehende, auff der Linie AB werde geſtölt, und sein Abgang GK seyen, welcher gleichförmig gemacht worden iſt dem ▭ N. d. 6. def. 6.

Wann nun diß ▭ AH ⌜ wäre, der gegebenen Figur M. so solte es schon gemacht seyn, was man verlangt hätte.

Es wird aber die Figur M ⌝ als das ▭ AH, geſetzt.
(Dann gröſſer kan es nicht seyn, wider dieſe, und 27 Vorgab. 6.)

Dahero ſuche durch die Hülffe der vorgehenden 27 den Unterſcheid, umb welchen das ▭ AH, oder das gleiche GK ⌜ iſt, als die Figur M. d. 36. 1.



Mache hernach mit dem gefundenen Unterscheid in dem □ GK das □ SI, so gleichförmig seye, dem □ GK, oder dem □ N. d. 18. 6.

Verlängere alsdann die Seiten IC in E, und SC zu beyden Seiten in D und F. So wird darauß entstehen das □ AC, welches auff der gegebenen Linie AB gleich groß der Figur M ist gestellt worden, und ihren Abgang EF gleichförmich hat dem gegebenen □ N. Dieses aber zu beweisen,

Ziehe vorgehends den Diameter HB, welcher nothwendig wegen der Gleichförmigkeit, und Gleichstellung durch die □ SI und EF gehen werde. d. 21. 6. d. 26. 6.

Beweiß.

Nunmehro ist klar, daß die □ EF. SI, und GK einander gleichförmig seint. d. 24. 6. Es ist aber das □ GK gleichförmig gemacht worden dem □ N.

Dahero werden auch die □ EF, nemlich der Abgang des □ AC, und das □ SI, nemlich der Unterscheid, gleichförmig seyn, dem □ N.

Unterdessen ist augenscheinlich wahr, daß (weilen in dem □ GK das □ SI der Unterscheid zwischen dem □ GK, d. d. Hand. und der Figur M ist) der Winckelhacken GCK ⌐ seye, der Figur M.

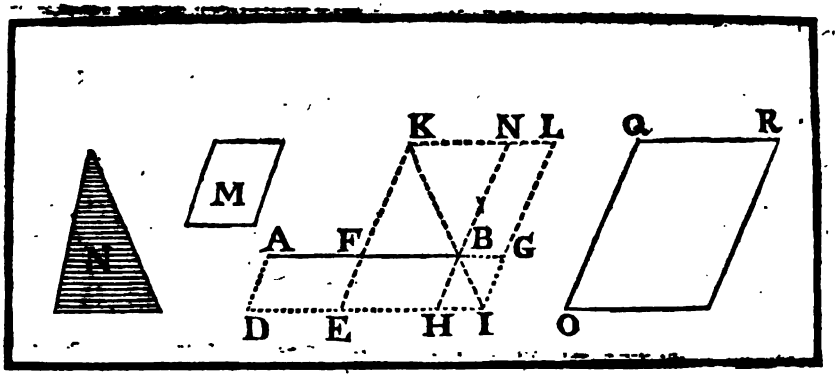
Nun aber ist das □ GC ⌐, dem □ CK. d. 34. 1. und wann man das gemeine □ EF hinzu setzet,

So wird auch das □ GF ⌐ seyn, dem □ EK. Dem □ GF aber ist ⌐ das □ AS. d. 36. 1. und Hand.

Darumb ist auch das □ AS ⌐, dem □ EK. Setze man beyderseits hinzu das gemeine □ GC.

So wird letztlich das □ AC ⌐ seyn, dem Winckelhacken GCK. oder, durch das vorgehende, der gleich grossen Figur M.

Welches zu machen ware.



Die XXIX. Vorgab.

Handgriff.

Auff einer vorgegebenen geraden Linie ein übertreffendes Parallelogram zu machen, welches gleich groß seye einer andern vorgegebenen geradtliniſchen Figur, und den Uberſchuß gleichförmig und gleichgeſtellter habe einem andern vorgegebenen Parallelogram.

Es seynd gegeben die gerade Linie AB, die Figur N, und das ▭ M. Dieſem nach ſolte man ein übertreffendes ▭ gleich wie AI, auff der gegebenen Linie AB ſtellen, welches gleich groß seye, der Figur N, und ihren Uberſchuß BI gleichförmig, und gleichgeſtellter habe dem ▭ M.

Handgriff.

Zertheile geradt entzwey die gegebene Linie AB. b. 10. 1.

Auff der Helffte FB mache das ▭ FN gleichförmig dem ▭ M. b. 18. 6.

Hernach mache in einem beſondern Ort das ▭ OR, daß es erſtlich der Figur N, und dem ▭ FN ſammentlich gleich groß, gleichförmig aber, und gleichgeſtellter dem ▭ M, oder FN seye. b. 45. 1. und 25. 6.

Verlängere die Seiten KN, und KF.

nehme KL ⌐, der QR, und KE ⌐, der QO.

Nach dieſem ziehe durch E die Linie DEI ═, der Linie AB, b. 31. 1.

Und auß L die Linie LGI ═, der Linie KFE.

Verlängere AB biß in G, und NB biß in H.

Letztlich ziehe auß A die Linie AD ═, der Linie FE.

Nunmehro beweiſet man, daß der Uberſchuß BI gleichförmig und gleichgeſtellter seye dem ▭ M. hernach, daß das ▭ AI (welches ein übertreffendes iſt), auff der Linie AB geſtellt, und gleich groß seye der Figur N.

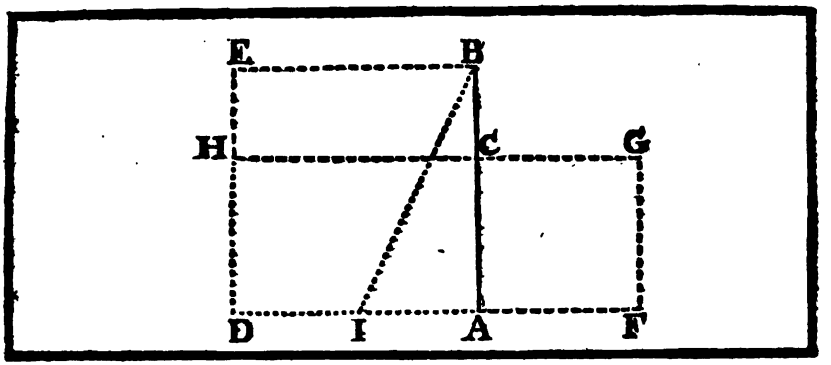
Ziehe vorgehends den Diameter KI, welcher nothwendig wegen der Gleichförmigkeit, und Gleichſtellung deren ▭ juſt durch beyde ▭ BI, und FN gehen werde. b. 26. 6.

Beweiß.

Erſtlich iſt klar, daß die □ OR. FN. BI, und EL
einander gleichförmig ſeint. d. d. Hand.
Es iſt aber das □ OR, oder das □ FN gleichförmig gemacht
worden, dem vorgegebenen □ M.
Dahero auch die andere □, als wie der Uberſchuß BI, und das □ EL. d. 21. 6.
gleichförmig ſeyn werde dem □ M.
So erſtlich zu beweiſen ware.

Alsdann, weilen KL, und KE ⊓ ſeint, denen QR, und QO. d. d. Hand,
Und wegen der Gleichförmigkeit auch der ∠ EKL ⊓, dem ∠ OQR.
d. 34. I.
ſo folget, daß das □ EL ⊓ ſeye, dem □ OR. und 36. I.
Das □ OR aber, iſt vorhero ⊓ gemacht worden, der Figur N, und
dem □ FN ſammentlich. d. d. Hand.
Dahero iſt auch das □ EL ⊓, der Figur N + □ FN.
Wann man nun auß dem □ EL das □ FN darvon ziehet,
ſo wird verbleiben der Winckelhacken EBK ⊓, der Figur N.
Unterdeſſen iſt das □ DF ⊓, dem □ EB, d. 34. I.
und das □ EB iſt ⊓, dem □ BL. d. 43. I.
Dahero iſt auch das □ DF ⊓, dem □ BL.
Wann man beyderſeits, das gemeine □ FI hinzu ſetzet,
So wird das □ AI ⊓ ſeyn, dem Winckelhacken EBL.
Es iſt aber ſchon bewieſen worden, daß der Winckelhacken EBL
⊓ ſeye, der Figur N.
Darumb wird auch das □ AI ⊓ ſeyn, der Figur N.

Welches letztlich zu beweiſen und zu machen ware.



Die XXX. Vorgab.

Handgriff.

Eine vorgegebene gerade Linie, nach der mittlern und äuſſerſten Proportion abzutheilen.

Es iſt gegeben die gerade Linie AB, welche alſo abzutheilen iſt, daß ſich die gantze Linie AB, zu dem gröſſern Stück AC verhalte gleich wie das daſſelbe Stück AC, zu dem kleinern CB. Nemlich daß es ſeye AB. AC :: AC. CB.

Handgriff.

Zertheile die gerade Linie AB auff ſolche Weiſe, daß das ▭ ſo gemacht iſt von der gantzen AB, und dem kleinern Stück CB, ⌐ ſeye dem □, welches gemacht iſt von dem gröſſern Stück AC. 8. II. 2.

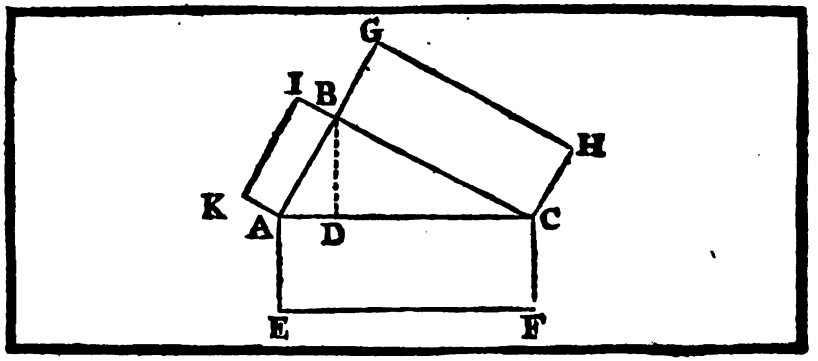
Dieſem nach ſaget man, daß die vorgegebene gerade Linie AB in dem Punct C nach der mittlern und äuſſerſten Proportion abgetheilt worden ſeye.

Beweiß.

Dieweilen das ▭ CE ⌐ gemacht worden iſt, dem □ CF: ſo wird ſeyn, EB (oder die gleiche AB) AC :: AC. CB. 8. 17. 6.

Dahero iſt die Linie AB nach der mittlern, und äuſſerſten Proportion in Puncten C abgetheilt worden. 8. 2. def. 6.

Welches zu machen war.



Die XXXI. Vorgab.

Betrachtung.

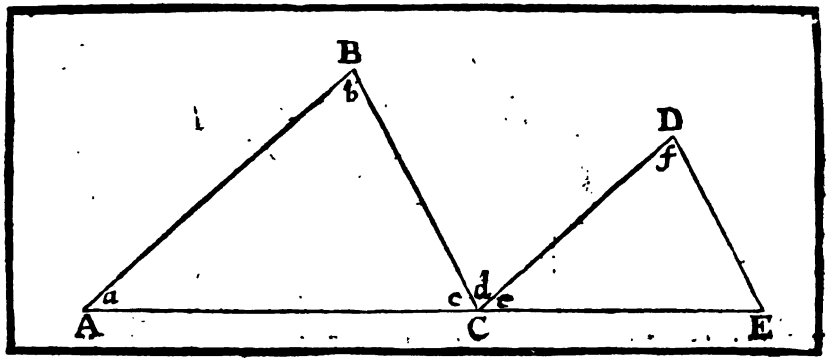
Wann auff denen drey Seiten eines rechtwincklichten Triangels drey gleichförmige und gleichgeſtellte Figuren beſchrieben ſeint: So wird dieſelbe (welche auff der Seiten, die den rechten Winckel unterſpannet, beſchrieben worden), gleich ſeyn denen andern zwey Figuren ſammentlich, welche auff denen andern zwey Seiten ſeint gemacht worden.

Es iſt gegeben der △ ABC rechtwincklicht in ∠ B, auff deſſen Seiten AB. BC CA ſeint gleichförmig und gleichgeſtellter, zu einem Exempel die □ AI. BH. AF. gemacht. Dieſem nach ſaget man, daß das □ AF, ſo auff der Seiten AC, welches den rechten ∠ B unterſpannet, beſchrieben worden, gleich groß ſeye, beeden □ AI, und BH ſammentlich.

Laſſe vorhero auß dem rechten ∠ B die ⊥ BD auff die Baſis fallen. d. 12. 1.

Beweiß.

Durch die ⊥ BD iſt gemacht worden, daß es ſeye in dem △ ABC
AC. CB :: CB. CD. d. 8. 2. Cor. 6.
Dahero wie ſich verhaltet AC. CD :: das □ AF. □ BH. d. 20. Cor. 6.
und durch die Umbkehrung CD. AC :: das □ BH. □ AF. d. 4. 5.
Es iſt auch in dem △ ABC. AC. AB :: AB. AD. d. 8. 2. Cor. 6.
Dahero wie ſich auch verhaltet AC. AD :: □ AF. □ AI. d. 20. Cor. 6.
und durch die Umbkehrung AD. AC :: □ AI. □ AF. d. 4. 5.
Mit einem Wort, es heiſt CD (1). AC (2) :: □ BH (3) □ AF (4).
und AD (5) AC (2) :: □ AI (6). □ AF (4).
Deßwegen ſeyn werde CD + AD. AC :: □ BH + AI □ AF. d. 24. 5.
Die Linien CD + AD ſeint aber ⊓, der gantzen AC
Folget, daß auch die □ BH + AI ⊓ ſeint, dem □ AF.
Welches zu beweiſen ware.



Die XXXII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann in zwey Triangeln, zwo Seiten eines geproportionirt ſeint, zweyen Seiten des andern, und beyde Triangeln alſo an einander geſtoſſen werden, daß ſie einen Winckel machen, und die gleichförmig-haltnuß-ſagende Seiten einander Parallel haben: ſo werden die übrige zwo Seiten in eine gerade Linie fort liegen.

Es iſt gegeben, daß die zwey △ ABC, und CDE die zwo Seiten geproportionirt haben, nemlich AB. BC :: CD. DE. Dieſe beyde △ werden hernach alſo zuſammen geſtoſſen, daß ſie einen ∠, nemlich den ∠ d machen, und die gleichförmig-haltnuß-ſagende Seiten AB. CD, und BC. DE einander Parallel kommen: dieſem nach ſaget man, daß die übrige zwo Seiten AC. CE in einer geraden Linie fort liegen.

Beweiß.

Dieweilen die Seiten AB = iſt, der Seiten CD. — d. d. Vorg.
und auch die Seiten BC = iſt, der Seiten DE.

So wird der ∠ b ⊓ ſeyn, dem ∠ d. — d. 29. 1.
und der ∠ d ⊓, dem ∠ f,
und folgends der ∠ b auch ⊓, dem ∠ f. — d. 1. ax. 1.

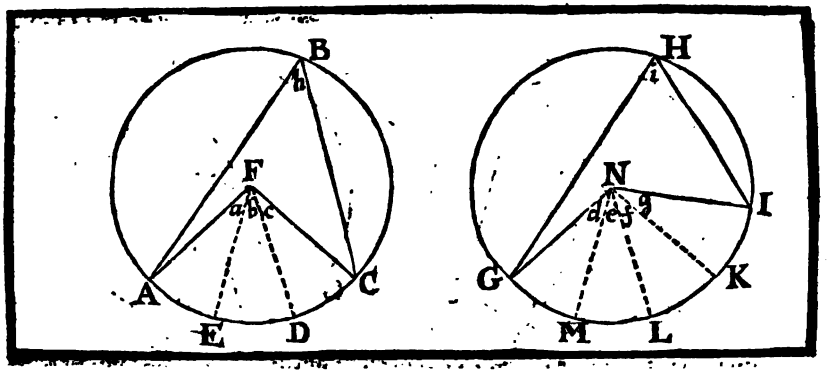
Unterdeſſen halt ſich AB. BC :: CD. DE. — d. d. Vorg.
Darumb iſt der ∠ ABC gleichwincklicht dem △ CDE. — d. 6. 6.
Und dahero iſt der ∠ a ⊓, dem ∠ e.

Wann man nun beyderſeits die gleiche ∠ d, und b hinzu ſetzet:
So iſt auch der ∠ a, und b ⊓, denen ∠ d, und e.

Setzet man abermahlen beyderſeits den gemeinen ∠ c hinzu,
So ſeint alle drey ∠ a, b, c ⊓, denen drey ∠ c, d, e.
Dieſe drey ∠ a + b + c ſeint aber ⊓, zwey rechten ∠. — d. 32. 1.

Folget, daß auch die ∠ c + d + e zwey rechten ⊓ ſeyen, und
deßwegen wird die Linie ACE eine gerade Linie fort ſeyn. — d. 14. 1.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXIII. Vorgab. Betrachtung.

In gleichen Zirckeln halten ſich, ſowol die Winckel bey dem Mittel-Puncte, als die, ſo in dem Umbkreiſſ ſtehen, gegen einander, als wie die Stücke deren Umbkreiſſe, oder Bögen, darauff ſie ſtehen: alſo halten ſich auch gegen einander die Außſchnitze, gleich wie ihre Stücke deß Umbkreiß oder Bögen.

Es ſeynd gegeben die zwey gleiche Zirckeln ABC, und GHI, bey dero Mittel-Puncten F, und N ſeint gemacht die ∠ AFC, oder a + b + c. und GNI, oder d + e + f + g. Dieſem nach ſaget man,

I. Daß ſich alſo verhalte der ∠ a + b + c, zu dem ∠ d + e + f + g, als wie der Bogen AC zu dem Bogen GI.

Zubereitung.

Suche einen gemeinmäßlichen Theil, welcher beyde Bögen AC, und GI geradt auffmeſſet.

Seye AE ein ſolcher Theil, welcher den Bogen AC geradt dreymahlen, und den Bogen GI geradt viermahlen auffmeſſet.

Ziehe die Puncten E. D in F, und M. L. K. in N zuſammen.

Beweiß.

Dieweilen die Theile, oder kleine Bögen AE. ED. DC, und GM. ML. LK. KI einander ſeint ⊓ gemacht worden. d. d. Zub.

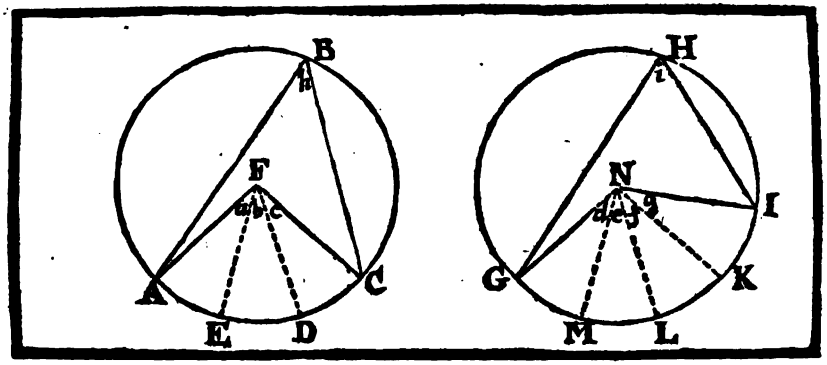
So werden auch die ∠ a. b. c, und die ∠ d e. f. g. einander ⊓ ſeyn. d. 27. 3.

Und die Anzahl deren kleinen ∠ ⊓ ſeyn, der Anzahl deren kleinen Bögen, oder Umbkreiß-Stücke.

Der Bogen AC aber, iſt geradt in drey gleiche Theile, und der Bogen GI geradt in vier gleiche Theile abgetheilt worden. d. d. Zub.

Dahero wird der gantze ∠ AFC, auch geradt in die drey kleine gleiche ∠, und der ∠ GNI in vier kleine, und gleiche ∠ abgetheilt ſeyn.

Und wegen gleicher Anzahl in einem und andern ſich verhalten.



Daß, wie offt der kleine Bogen AE in dem gantzen Bogen GI begriffen iſt: ſo offt auch der kleine ∠ a in dem gantzen ∠ d + e + f + g begriffen ſeye.

Und ferners, wie offt die zwey kleine, und gleiche Bögen AE + ED in dem gantzen Bogen GI begriffen ſeint: ſo offt auch die zwey kleine, und gleiche ∠ a + b in dem gantzen ∠ d + e + f + g begriffen ſeint.

Letztlich, wie offt die drey kleine und gleiche Bögen AE + ED + DC (das iſt, der gantze Bogen AC) in dem gantzen Bogen GI begriffen ſeint:

ſo offt auch die drey kleine und gleiche ∠ a + b + c (das iſt, der gantze ∠ AFC) in dem gantzen ∠ d + e + f + g (das iſt, in dem ∠ GNI) begriffen ſeyn. d. 14. ax. I.

Dahero, als wie ſich verhaltet der Bogen AC zu dem Bögen GI: : ∠ AFC. ∠ GNI. d. 6. def. 5. 7.

II.

Saget man, daß die ∠ in dem Umbkreiſſe, gleich wie die ∠ h, und i, ſich gegen einander verhalten, gleich wie ihre Bögen AC, und GI, worauff ſie ſtehen

Die Urſach iſt, weilen die ∠ h und i gerad die Helffte von denen ∠ a + b + c, und d + e + f + g ſeint. d. 20. 3.

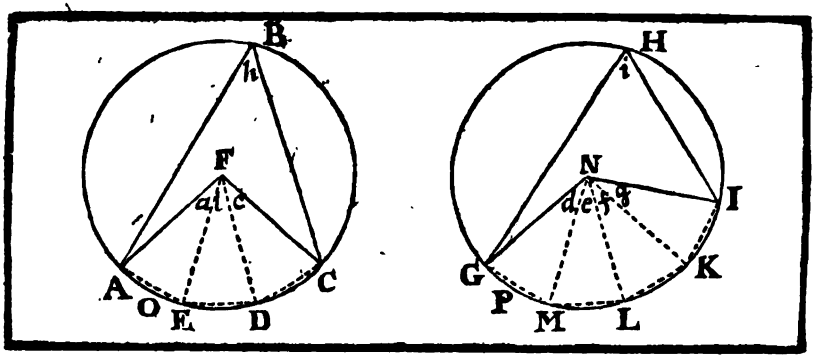
Dieſe aber halten ſich gegen einander, gleich wie ihre Bögen AC. GI. d. d. Borg.

Dahero auch ſeyn werde der ∠ h. ∠ i : : der Bogen AC, zu dem Bogen GI. d. 15. 5.

III.

Saget man, daß der Außſchnitz AFCDE, zu dem Außſchnitz GNIKLM ſich verhalte, gleich wie der Bogen AC zu dem Bogen GI.

Ziehe vorhero die Puncten A. E. D. C, und G. M. L. K. I. mit geraden Linien zuſammen.



Nun iſt klar, daß wegen der gleichen Linien AF. EF, und GN. MN, und deren gleichen ∠ a, und d. d. 15. def. 1. d. 8. Vorg.

Der △ AFE ⌐ ſeye, dem △ GNM. d. 4. 1.

So iſt auch der Zirckel ABC ⌐, dem Zirckel GHI. d. 8. Vorg.

Wann man nun von dieſen gleichen Zirckeln die beyde gleiche △ darvon ziehet,

So wird überbleiben der kleine Zirckel-Schnitz AOE ⌐, dem kleinen Schnitz GPM.

Setze dieſe gleiche Schnitze beyderſeits zu den gleichen △ AFE, und GNM hinzu.

So werden die kleine Außſchnitze AFEO, und GNMP darauß entſtehen, welche auch ⌐ einander ſeyn werden. d. 2. ax.

Unterdeſſen ſo viel kleine Bögen in einem und andern gantzen Bogen ſeint, ſo viel werden auch kleine und gleiche Außſchnitze in einem und andern gantzen Außſchnitze ſeyn.

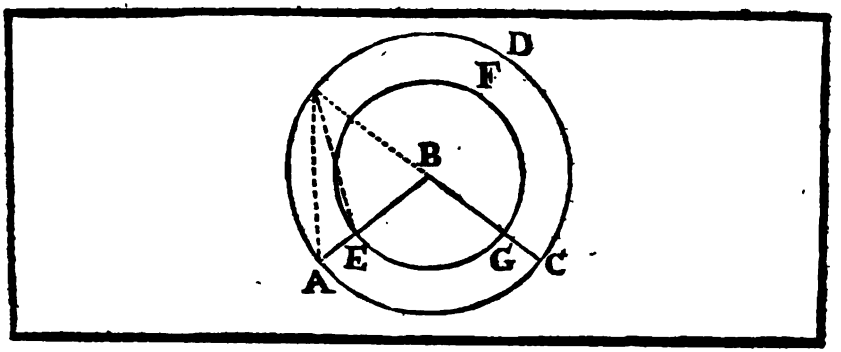
Es ſeint aber in dem Bogen AC drey kleine und gleiche Bögen, und in dem Bogen GI vier kleine und gleiche Bögen gemacht worden: d. 8. Zub.

Deßwegen auch der Außſchnitz AFC. DEA geradt drey kleine und gleiche Außſchnitze, und der Außſchnitz GNIKLM geradt vier kleine und gleiche Außſchnitz begreiffen werde.

Und wegen gleicher Anzahl in einem und andern ſeyn:

Wie offt der kleine Bogen AE in dem gantzen Bogen GI begriffen iſt: ſo offt wird auch das Außſchnitzl. AFE in dem gantzen Außſchnitz GNIKLM begriffen ſeyn,

Und wie offt die zwey Bögen AE + ED in dem gantzen Bogen GI begriffen ſeint: ſo offt werden auch die



Zwey Außschnitzeln AFE + EFD in dem gantzen Außschnitz GNIKLM begriffen seyn.

Letzlich wie offt die drey kleine und gleiche Bögen AE + ED + DC (das ist der Bogen AC) in dem gantzen Bogen GI begriffen seint, so offt werden auch die drey kleine und gleiche Außschnitze AFE + EFD + DFC (das ist der Außschnitz AFCDE) in dem gantzen Außschnitz GNIKLM begriffen seyn.

Und dahero seyn, als wie der Bogen AC zu dem Bogen GI: also ist der Außschnitz AFCDE, zu dem Außschnitz GNIKLM Welches zu beweisen ware. [b. 6. def. 5 7.

Folge.

I.

Es verhaltet sich ein Außschnitz zu dem andern, gleich wie ein Winckel zu dem andern, welche von denen Außschnitzen gemacht werden.

II.

Der Winckel bey dem Mittel-Punct (als wie der ∠ B in dem Zirckel ADC) verhaltet sich gegen vier rechte Winckeln; gleich wie das Umbkreiß-Stück AC, worauff er stehet, zu dem gantzen Umbkreiß deß Zirckels (ADC):

III.

Die Umbkreiß-Stücke oder Bögen (gleich wie AC. EG) in ungleichen Zirckeln (ADC EFG.) welche gleiche Winckeln unterspannen, (es seyen umb den Mittel-Punct, oder in dem Umbkreiß): seint einander gleichförmig.

IV.

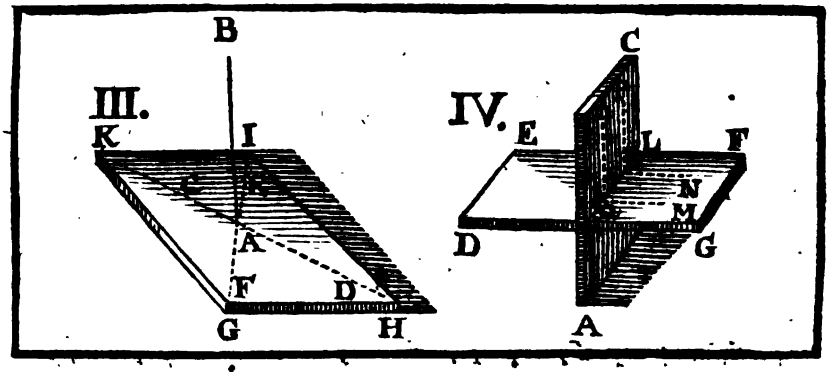
Zwey halbe Diameter, als wie AB. CB schneiden in denen Zirckeln ADC. EFG, welche auß einerley Mittel-Punct B beschrieben seint, gleichförmige Bögen AC, EG ab.

Das

Siebende Buch

Deß Teutsch-redenden

Euclides.



Wort-Erklärungen.

I.

Etwas dichtes (Solidum), oder ein Cörper iſt, welches eine Länge, Breite, und Dicke hat.

II.

Das euſſerſte eines Cörpers, iſt die Fläche.

III.

Man ſagt, daß eine gerade Linie (AB) auff einer Fläche (GHIK) bleyrecht ſtehe, wann ſie auff allen geraden Linien (gleich wie auff EF. CD), welche auff derſelben Fläche liegen, und ſothane gerade Linie (AB) anrühren, auch bleyrecht ſtehet. Fig. III.

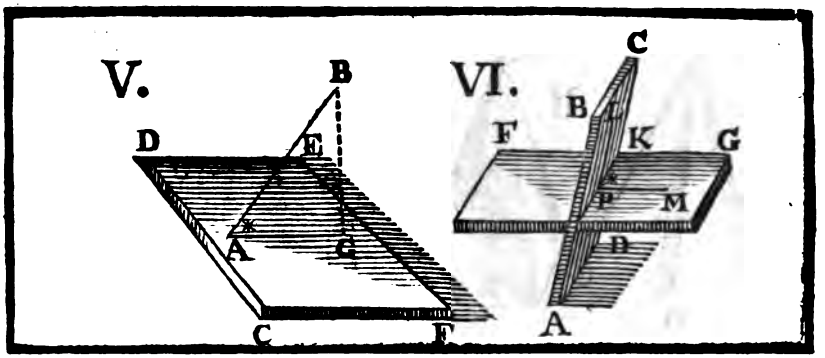
Das iſt; wann AB mit denen geraden Linien EF. CD (welche ſie an Punct A anrühren, und auff der Fläche GHIK liegen) die ∠ FAB. DAB. EAB. CAD unter einander gleich machet.

IV.

Eine Fläche (AC) ſtehet auff einer andern Fläche (DEFG) bleyrecht, wann die gerade Linien (OQ PK.) welche auß dem gemeinen Durchſchnitt (LKQI) gezogen worden, ſowohl auff einer Fläche (AC) als auff der andern (DEFG) bleyrecht ſtehen. Fig. IV.

Das iſt, OQM. PKN müſſen rechte Winckeln ſeyn.

Mercke, daß der gemeine Durchſchnitt zweyen oder mehr Cörpern eine gerade Linie allein ſeye, welche, wann ſich zwey oder mehr Cörper durchſchneiden, ſolche zugleich berühret; gleich wie allhier iſt der gemeine Durchſchnitt die gerade Linie IQKL, welche zugleich die Fläche AC, und die Fläche DEFG berühret.



V.

Wann von dem einen Ende (B) einer geraden Linie (AB) auff dieſelbe Fläche (CDEF) worauff die gerade Linie (AB) auffſtehet, eine bleyrechte Linie (BG) herunter gelaſſen wird (als wie in dem Punct G), und das andere Ende (A), und ſolcher Punct (G), mit einer geraden Linie zuſammen gezogen werden: ſo ſagt man hernach, daß der ſcharffe Winckel (*), welcher von der auffſtehenden (AB), und zuſammen gezogenen Linie (AG) gemacht wird, die Neigung (inclinatio) der geraden Linie (AB) zu der Fläche (CDEF) ſeye. Fig. V.

Mercke, nachdem der ∠ * groß, oder klein iſt, nach dieſem wird die Neigung der Linie AB zu der Fläche CDEF, groß oder klein genant.

VI.

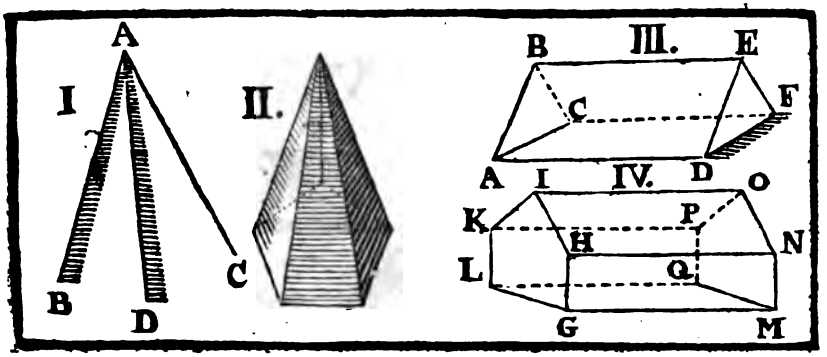
Eine Fläche (ABCD) neiget ſich zu einer andern Fläche (FG) wann die zwey gerade Linien (PL. PM), welche auß dem gemeinen Durchſchnitt (IPK), und bleyrecht in beyde Fläche ſeynd gezogen worden, einen ſcharffen Winckel (*) mit einander machen. Fig. VI.

VII.

Die Flächen neigen ſich gleichförmig zu andern Flächen; wann ſie ihre Neigungs-Winckeln (anguli inclinationum) einander gleich haben.

VIII.

Parallel, oder gleich weit abſtehende Flächen ſeynd, welche allzeit in gleicher Weite von einander ſtehen, und niemahlen zuſammen kommen.



IX.

Gleichförmige dichte Figuren, oder Cörper seint, welche mit gleichförmigen, und an der Anzahl gleichen Flächen beschlossen seint.

X.

Gleichgroß und gleichförmige dichte Figuren, oder Cörper seynt, welche mit gleichförmigen, und an der Anzahl und Grösse gleichen Flächen beschlossen seint.

XI.

Ein dichter Winckel (A) ist, welcher von mehr als zweyen Fläche, (auff das wenigst von dreyen, gleich wie allhier BAC. CAD. BAD), so nicht auff einerley Fläche liegen, doch aber in einem Punct (A) zusammen stossen, gemacht wird. Fig. I.

XII.

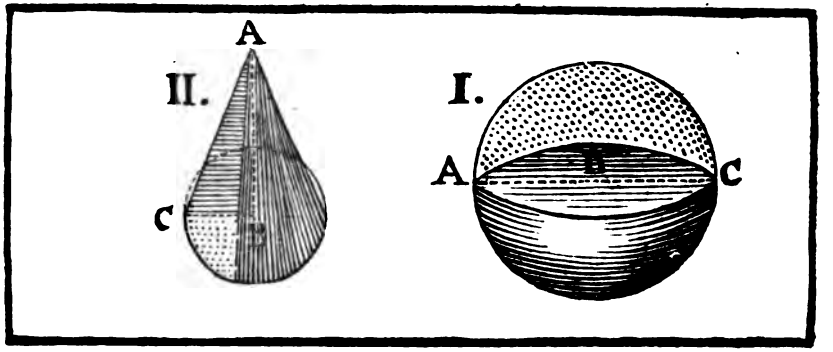
Spitz-Säule (Pyramis) ist eine dichte Figur, mit etlichen Flächen umbschlossen, welche von einer Fläche in einen Punct zusammen gezogen seint.

Mercke, wann die eine, oder untere Fläche, drey- vier- oder funff-eckicht, u. s. f. ist, so wird nachmahlen die dichte Figur, eine drey- vier- oder funff-eckichte Spitz-Säule, u. s. f. genant, Fig. II.

XIII.

Eck-Säule (Prisma) ist eine dichte Figur mit etlichen Flächen beschlossen, deren die zwey gegen überstehende, gleich groß und gleichförmig, und Parallel einander, die übrige aber Parallelogrammen seint. Fig. III. IV.

Die Fig. III. ist eine dreyeckichte und IV. eine fünff-eckichte Eck-Säule. ABC, DEF, und GHIKL, MNOPQ. seynd die zwey gegen über stehende Flächen, so einander gleich groß, gleichförmig und Parallel seint. Die andern Flächen ABED. ACFD. CBEF. und GHNM.HION.IKPO.KLPQ. LGMQ. seint ▭.



XIV.

Eine Kuget (Sphæra) iſt eine dichte Figur, welche entſtehet, wenn man einen halben Zirckel umb ſeinen Diameter rings herumb, biß an das Ort, allwo man hat anfangen, umbdrähet. Fig. I.

XV.

Die Achſe (Axis Sphæræ) iſt der Diameter, oder ſolche gerade Linie (ABC), umb welche der halbe Zirckel iſt gedrähet worden.

XVI.

Der Mittel-Punct deß halben Circkels (B) iſt auch der Mittel-Punct der Kugel (Centrum Sphæræ).

XVII.

Der Diameter einer Kugel iſt eine gerade Linie, welche durch den Mittel-Punct gezogen, ſich beyderſeits an der Kugel-Fläche endet.

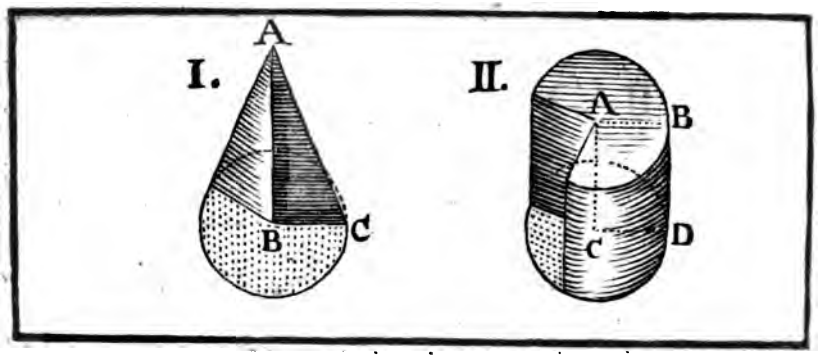
XVIII.

Ein Kögel (Conus) iſt eine dichte Figur, welche erwachſet, wann ein recht-wincklichter Triangel (CBA), umb eine derjenen Seiten, welche den rechten Winckel mitmachet (als wie umb BA) rings herum, biß an das Ort, allwo man angefangen hat, gedrähet wird. Fig. II.

Mercke, wann AB und BC einander gleich ſeint: ſo wird die Figur ein rechter Kögel; iſt aber AB kleiner als BC, ein ſtumpffer; und letztlich wann AB gröſſer iſt als BC, ein ſpitziger Kögel genandt.

XIX.

Die Achße deß Kögels (AB) iſt diejene Linie, umb welcher der Triangel iſt gedrähet worden.



XX.

Die Basis deß Kögels ist ein Zirckel, welcher von der herum gedrähten Linie ist gestaltet worden. Fig. I.

XXI.

Eine Waltze (Cylindrus) ist eine dichte Figur, welche gemacht wird, wann ein rechtwincklichtes Parallelogram (ABCD) umb seiner Seiten eine (als wie umb CA) rings herum biß an das Ort, allwo man hat angefangen, gedrähet wird. Fig. II.

XXII.

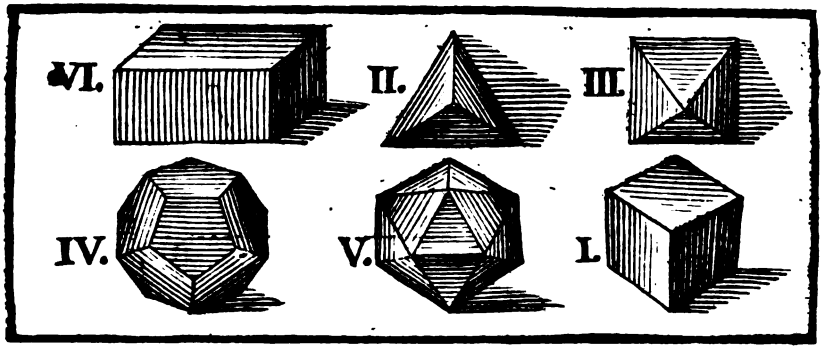
Die Achse der Waltze ist diejene Seiten (CA) umb welcher man das Parallelogram geträhet hat.

XXIII.

Die Basen der Waltzen seint Zirckeln, welche von denen zwey gegen über stehenden Seiten (AB, CD) in Herumdrähen seint gestaltet worden.

XXIV.

Gleichförmige Kögeln und Waltzen seint, welche die Achse und die Diameter ihrer Basen einander geproportionirter haben.



XXV.

Ein Würffel (Cubus) iſt eine dichte Figur, welche von ſechs gleichen Quadraten beſchloſſen iſt. Fig. I.

XXVI. Tetraedrum iſt eine dichte Figur, welche von vier gleichſeitigen und gleichen Triangeln beſchloſſen iſt. Fig. II.

XXVII. Octaedrum iſt eine dichte Figur, welche von acht gleichſeitigen und gleichen Triangeln umbſchloſſen iſt. Fig. III.

XXVIII. Dodecaedrum iſt eine dichte Figur, welche von zwölff gleichſeitigen, gleichwincklichten und gleichen fünffecken umbſchloſſen iſt. Fig. IV.

XXIX. Icoſaedrum iſt eine dichte Figur, welche von zwantzig gleichſeitigen und gleichen Triangeln beſchloſſen iſt. Fig. V.

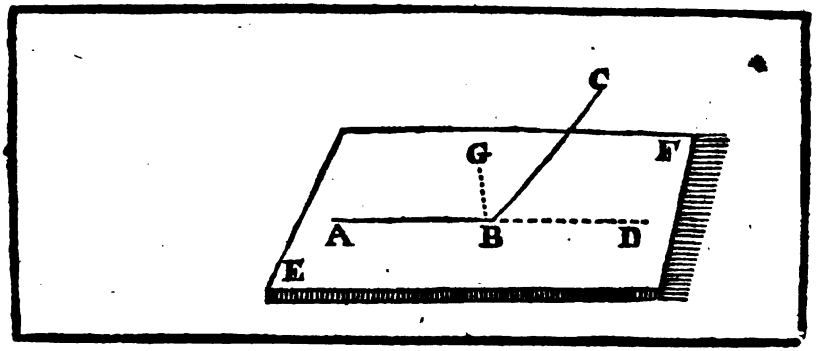
XXX. Parallelepipedum iſt eine dichte Figur, welche von ſechs vierſeitigen Figuren, deren gegen über ſtehende allzeit einander Parallel ſeint, beſchloſſen iſt. Fig. VI.

Mercke; daß deren Parallelepipeden ſo vielerley Art gebe, als deren Parallelogrammen ſeynd.

XXXI. Eine dichte Figur, ſaget man, ſeye in eine dichte Figur eingeſchrieben, wann alle Winckeln der Figur, welche ſolte eingeſchrieben werden, entweder in denen Winckeln, oder in denen Seiten, oder endlich in denen Flächen der Figur, in welche die eine eingeſchrieben wird, geſtellt ſeynd.

XXXII. Eine dicke Figur, ſagt man, ſeye umb eine dichte Figur umbſchrieben, wann die Winckeln, oder die Seiten, oder letztlich die Fläche der Figur, welche umbſchrieben ſolte werden, alle Winckeln der Figur, umb welche die eine umbſchrieben wird, berühre.

Anmerckung. In folgenden Büchern wird gemeiniglich ein dichter Winckel mit vier Buchſtaben angedeutet, darvon der erſte den Spitz, oder den Punct deß Winckels anweiſet. Zu einem Exempel, wann geſchrieben iſt, der ∠ ABCD. ſo verſtehe, daß der Spitz oder Puncten deß dichten Winckels ſeye, allwo der Buchſtaben A ſtehet.



Die I. Vorgab.

Betrachtung.

Eine gerade Linie kan nicht mit einem Theil auff einer Fläche, und mit dem übrigen Theil, auff einer andern Fläche liegen.

Seye gegeben, daß in der unterlegten Fläche EF ein Theil von einer geraden Linie, als wie AB, seye; so sagt man, daß auch der übrige Theil BC von der geraden Linie nothwendig auff derselben Fläche, und nicht aufferhalb derselben liegen müsse. Gesetzt, man sagte dannoch, daß BC aufferhalb der Fläche EF seye.

Beweiß.

Nun ist es klar, daß auff der Fläche EF eine gerade Linie gleich wie BD kan gezogen werden, welche mit AB in einer geraden Linie fort liege.

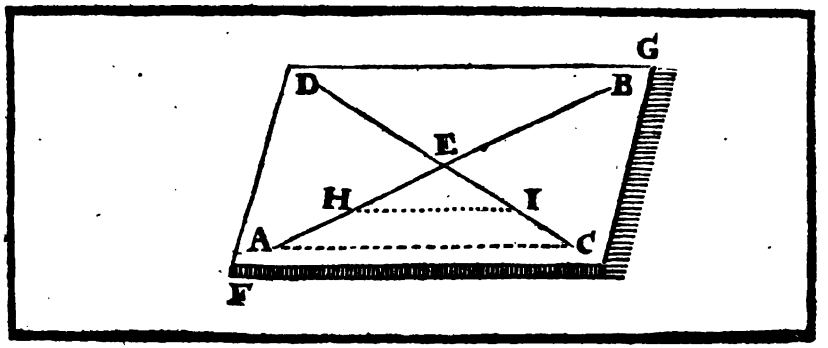
Dann, man kan auß B die Linie BG solchergestalt ziehen, daß die zwey ∠ ABG und DBG einander gleich, und dahero zween rechte werden.

Und folgends die ABD in einer geraden Linie fort liege. 9. 14. 1.

Unterdessen aber würden BC und BD auß der geraden Linie AB entspringen. Welches ungereimt ist. 9. 13. ax. 1.

Dahero schlieffet man, daß nothwendig beyde Theile einer geraden Linien auff einer Fläche allein, und nicht aufferhalb derselben, liegen müssen.

Welches zu beweisen ware.



Die II. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwey gerade Linien ſich einander in einem Punct durchſchneiden: ſo werden ſie auff einer Fläche allein liegen. Und ein jeder Triangel lieget auch nur auff einer Fläche allein.

Es iſt gegeben, daß die zwey gerade Linien AB und CD ſich einander in dem Punct E durchſchneiden, und das mit der geradtgezogenen Linie AC, der △ AEC ſeye geſtaltet worden. Dieſem nach ſagt man, daß der gantze △ AEC, und die gerade Linien AB und CD völlig auff der einigen Fläche FG liegen.

Beweiß.

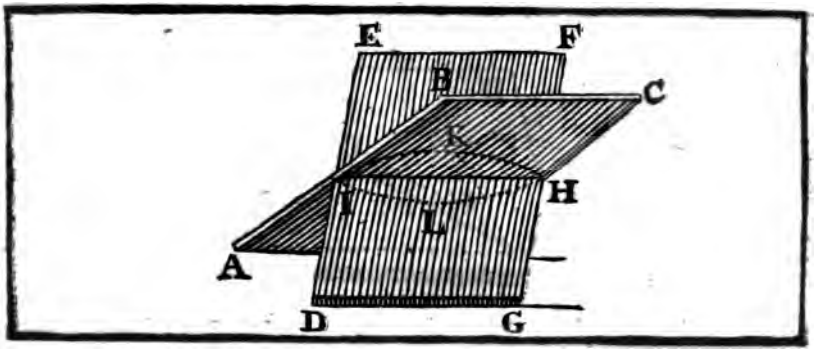
Wann es nicht geglaubt würde, ſo ſeye es, (wofern es möglich iſt), daß von dem △ AEC ein Theil, gleich wie AHIC auff einer Fläche, und der andere Theil HEI auff einer andern Fläche liege?

So folgete ſtracks darauff, daß der Theil AH von der geraden Linie HE auff einer Fläche, und der andere Theil HE darvon, auff einer andern Fläche liegete.

Und auch der eine Theil CI von der geraden Linie CE, auff einer Fläche, und der andere Theil IE darvon, auff einer andern Fläche liezete. Welches aber nicht ſeyn kan. d. 1. 11.

Dahero ſchlieſſet man, daß noch der gantze △ AEC nur auff einer Fläche allein, und eben durch dieſen Beweiß auch die gantze gerade Linien AEB, und CED auff derſelben Fläche allein liegen müſſen.

Welches zu beweiſen ware.



Die III. Vorgab.

Handgriff.

Wann zwey Flächen sich einander durchschneiden: so ist ihr gemeiner Durchschnitt nur eine gerade Linie allein.

Es ist gegeben, daß die Fläche ABC, und DEFG sich einander durchschneiden. Diesem nach saget man, daß ihr gemeiner Durchschnitt HI nur eine gerade Linie allein seye.

Beweiß.

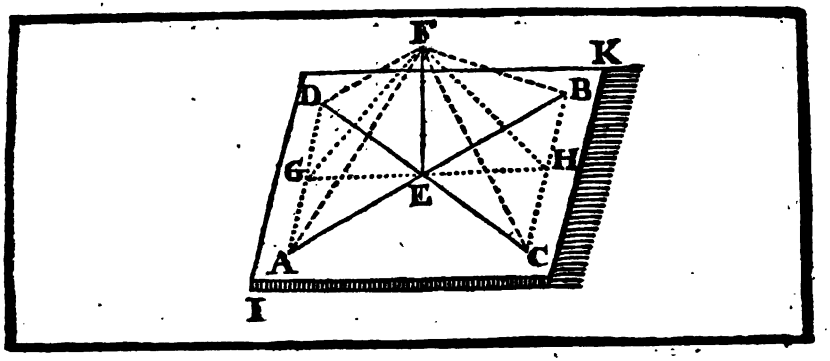
Will man diß nicht glauben, sondern einwerffen, es wäre in der Fläche ABC die gerade Durchschnitts-Linie IKH (wie mans doch möglichst), und in der Fläche DEFG in andere gemeine gerade Durchschnitts-Linie ILH.

Darauff aber geantwortet wird, das auff solche Weise (indeme beyde gerade Linien IKH, und ILH auß einerley Ende gezogen werden) den Platz IKHL einschliesseten;

So aber nicht seyn kan: d. 12. ax. 1.

Dahero nothwendig zu sagen ist, daß der gemeine Durchschnitt HI nur eine gerade Linie allein seye.

Welches zu beweisen ware.



Die IV. Vorgab. Betrachtung.

Wann eine auß dem gemeinen Durchſchnitt gezogene gerade Linie auff zwey geraden Linien (welche einander ſich durchſchneiden) bleyrecht ſtehet: ſo wird ſie auch auff der Fläche, welche durch die zwey gerade Linien durchgezogen verſtanden wird, oder darauff ſie würcklich liegen, bleyrecht ſtehen.

Es iſt gegeben, daß die gerade Linie EF bleyrecht ſtehe, auff denen geraden Linien AB, und CD, welche einander ſich durchſchneiden in E, alſo, daß die ∠ AEF. DEF. BEF. CEF. vier rechte ∠ ſeint. Dieſem nach ſagt man, daß dieſelbe Linie EF auch auff der Fläche IK, auff welcher die gerade Linien AB und CD liegen, bleyrecht ſtehe.

Das iſt, eine jede nach Gefallen genommene gerade Linie auff der Fläche IK, und durch den gemeinen Durchſchnitts-Punct F. gezogene, gleich wie die gerade Linie GEH, wird jederzeit mit EF einen rechten Winckel machen.

Zubereitung.

Mache EA. ED. EB. EC einander gleich.

Ziehe AD und CB zuſammen, ſo wird hierdurch die nach Gefallen genommene Linie GEH in denen Puncten G und H durchgeſchnitten.

Hänge AF. GF. DF. BF. HF. CF zuſammen. Dieſem nach,

Beweiß.

In denen △ FEA. FEB. FEC. FED iſt die Seiten EF allen gemein.

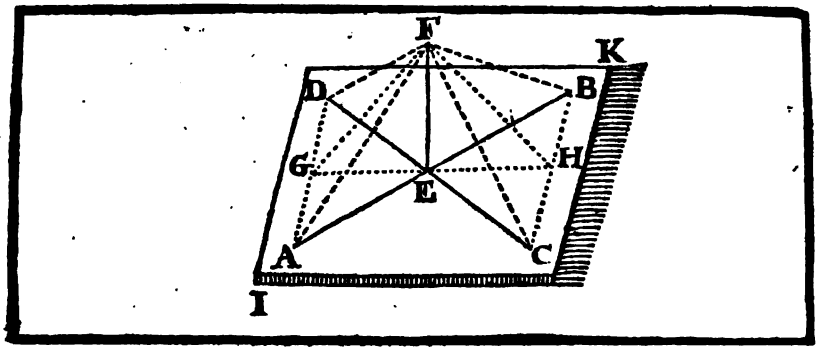
Und die Seiten EA. ED. EB. EC. ſeynd einander ▭ gemacht worden. d. d. Zuß.
und die ∠ AEF. DEF. BEF. CEF ſeynd auch einander gleich. d. d. Vorg.

Folget, daß auch die Baſen AF. DF. BF. CF einander gleich ſeint. d. 4. I.

Ferners, in denen zwey △ AED, und CEB, ſeint
Die zwo Seiten EA. ED ▭, denen zwo Seiten EC. EB. d. d. Zuß.
und der ∠ AED ▭, dem gegenüberſtehenden ∠ CEB. d. 15.

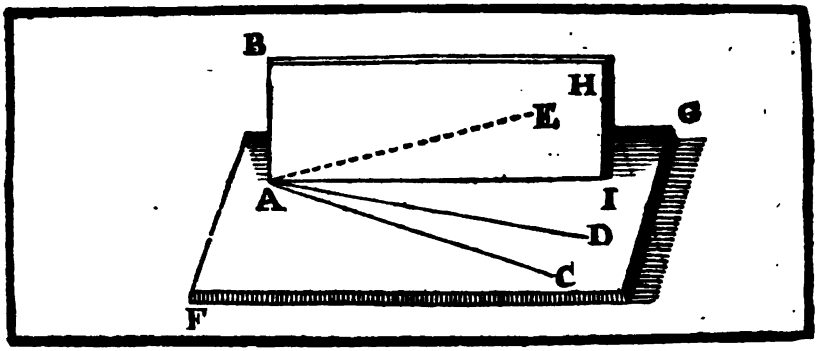
Dahero auch AD ▭ ſeyn werde, der CB. d. 4. I.

Und alſo der ∠ EDA ▭, dem ∠ ECB. u. ſ. f.



Nunmehro in denen zwey △ DGE, und CHE
ist der ∠ DEG ⊓, dem ∠ CEH, d. 15. 1.
Der ∠ GDE, ist auch bewiesen worden ⊓, dem ∠ ECH. d. d. Vorg.
und die Seiten ED ist auch ⊓, der Seiten EC. d. d. Zub.
Folget, daß die Seiten DG. GE ⊓ seint, denen Seiten CH. HE. d. 26. 1.
Mehrmahlen in denen zwey △ AFD, und CFB
seynd die zwo Seiten AF. DF ⊓, denen zwo Seiten CF. BF. d. d. Vorg.
und die Basis AD, ist schon ⊓ bewiesen worden, der Basis CB.
Deßwegen die drey ∠ eines △ ⊓ seint, denen drey ∠ deß andern △, d. 8. 1.
Als wie der ∠ FDA ist ⊓, dem ∠ FCB. u. s. f.
Weilen aber in denen zwey △ FDG und FCH ist bewiesen worden,
daß die zwo Seiten FD, DG ⊓ seind, denen zwo Seiten FC. CH,
und der ∠ FDG ⊓ seye, dem ∠ FCH.
So wird auch die Basis GF ⊓ seyn, der Basis FH. d. 4. 1.
Letztlich in denen zwey △ FEG, und FEH ist
die Seiten EF beyden △ gemein.
Und die zwo Seiten EG, GF ⊓, denen zwo Seiten HE, FH. d. d. Vorg.
Dahero auch der ∠ FEG ⊓ ist, dem ∠ FEH. d. 8. 1.
Und deßwegen beyde ∠ zwey rechte seyn werden, und d. 10. def. 1.
die Linie EF auff der, nach Gefallen durch E gezogener, geraden
Linie GEH bleyrecht stehen u. s. f.
Diese GEH aber lieget auff der Fläche IK, worauff die andern d. d. Zub.
zwey Linien AB. CD liegen.
Folget letztlich, daß auch EF auff derselben Fläche IK bleyrecht stehe. d. 3. def. 11.

Welches zu beweisen ware.



Die V. Vorgab.

Betrachtung.

Wann eine gerade Linie auff drey geraden Linien (welche in einem Punct ſich einander berühren) bleyrecht ſtehet: ſo werden ſolche drey Linien auff einer Fläche allein liegen.

Es iſt gegeben, daß die gerade Linie AB auff denen drey geraden Linien AC. AD. AI, welche einander ſich im Punct A berühren, bleyrecht ſtehen. Dieſem nach ſaget man, daß dieſe drey Linien AC. AD. AI. auff einer Fläche allein, nemlich auff der Fläche FG, liegen.

Beweiß.

Will man es nicht zulaſſen: ſo ſeye dann, daß eine auß ihnen, nemlich AI, nicht auff der Fläche FG, ſondern von derſelben erhöhter, als wie AE ſeye.

Unterdeſſen ſeye aber durch EA und AF die Fläche AH gezogen, welche die Fläche FG unterhalb der erhöhten AE durchſchneiden, und den gemeinen Durchſchnitt AI, welcher zugleich die gerade Linie AI iſt, machen werde. d. 3. 11.

Nun iſt klar, weilen AB bleyrecht auff AC und AD ſtehet, d. d. Vorg.
daß dieſelbe AB auch bleyrecht auff der Fläche FG ſtehen werde; d. 4. 11.
und folgends auch bleyrecht auff dem Durchſchnitt AI. d. d. ſelb.

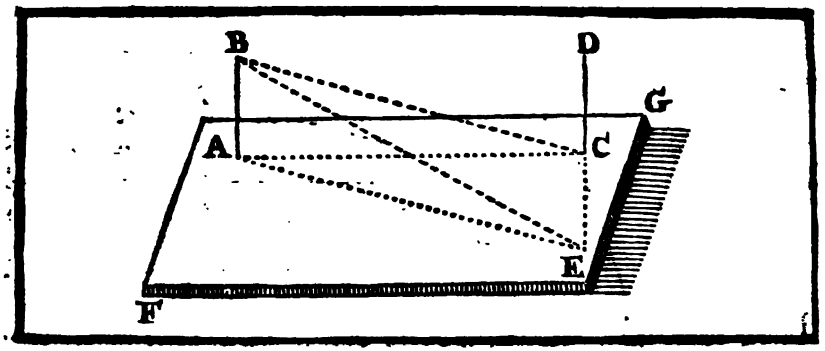
Dahero iſt der ∠ BAI ein rechter ∠. d. d. Vorg.
Es muß auch der ∠ BAE ein rechter ∠ ſeyn:

Folget, daß alſo der Winckel BAE ⌐ ſeye, dem ∠ BAI.
(dann beyde auff der Fläche AH wären)

So aber nicht ſeyn kan; daß nemlich ein Theil ⌐ ſeye, ſeinem Gantzen.

Darum ſchlieſſet man, daß die drey Linien AC. AD. AI. nur auff der Fläche FG allein liegen.

Welches zu beweiſen ware.



Die VI. Vorgab.

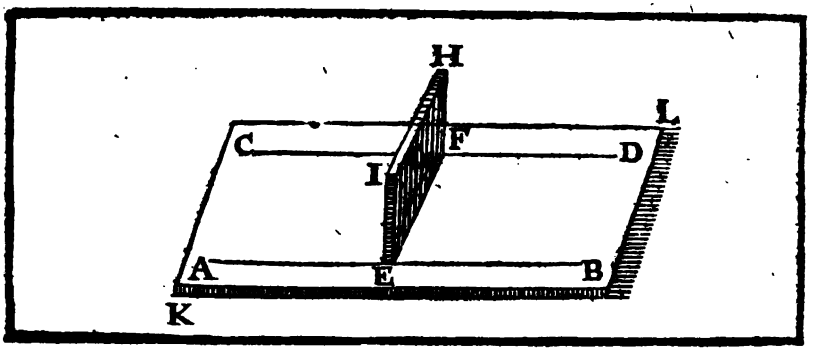
Betrachtung.

Wann zwey gerade Linien auff einerley Fläche bleyrecht stehen: so seynd sothane Linien einander Parallel.

Es seynd gegeben die zwey gerade Linien AB. CD, welche bleyrecht stehen auff der Fläche FG. Diesem nach saget man, daß sie einander Parallel seynd. Ziehe vorhero A. C. zusammen, so ist klar, daß die ∠ BAC. DCA zween rechte seynd; hernach in der Fläche FG auff AC erhöhe die bleyrechte EC. Mache EC ⊓, der AB. Letzelich ziehe zusammen AE. BE. BC.

Beweiß.

In denen zwey △ CAB, und ACE ist die Seite AC beyden △ gemein.
und die Seiten AB ⊓, der Seiten CE. d. d. Zub.
und der ∠ BAC ⊓ dem ∠ ACE (dann beyde rechte seynd).
Dahero auch die Basis BC ⊓ ist, der Basis AE. d. 4. I.
Abermahlen in denen zween △ BEA. CBE ist die Basis BE beyden △ gemein,
und die zwo Seiten AB. AE seynd ⊓ bewiesen denen zwo Seiten CE. BC.
Folget, daß auch der ∠ BAE ⊓ seye, dem BCE. d. 8. I.
der ∠ BAE ist aber ein rechter: dahero auch der ∠ BCE ein rechter ist.
Es ist auch der ∠ DCE ein rechter: d. 3. def. XI.
Deßwegen wird die Linie EC auff denen drey Linien CD. CB. CA ⊥ stehen.
und folgends die drey Linien CD. CB. CA. werden auff einer Fläche liegen. d. 5. XI.
Das ist: CD ist in der Fläche, welche durch die Linien CD. CB. CA gezogen, verstanden wird.
So ist auch AB in derselben Fläche, in welcher CB. CA seynd: d. 2. XI.
Dahero seynd CD und AB in einer Fläche.
Dieweilen nun die inwendige ∠ BAC. DCA zween rechte ∠ seynd. d. d. Vorg.
So wird letztlich AB ∥ seyn, der CD. d. 28. I.
Welches zu beweisen ware.



Die VII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zween Puncten in zweyen Parallel-Linien genommen, und mit einer geraden Linie zuſammen gezogen werden: ſo wird ſothane Linie in derſelben Fläche, worauff die Parallel ſeynd, liegen.

Es iſt gegeben, daß in denen zwey Parallel-Linien AB, CD, zween Puncten, gleich wie E und F, nach Gefallen ſeynd genommen, und mit einer geraden Linie zuſammen gezogen worden. Dieſem nach ſagt man, daß die gerade Linie EF eben auff derſelben Fläche KL, worauff die Parallel-Linien ſeynd, liege.

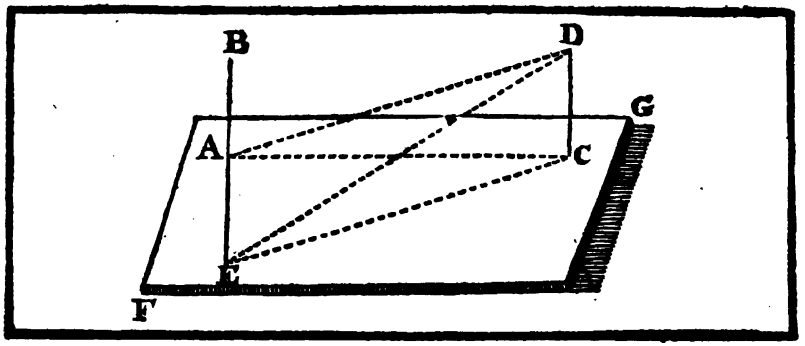
Beweiß.

Solte man es nicht geſtehen, ſondern einwenden, daß die gerade Linie EF nicht auff der Fläche KL, ſondern gleich wie EGF, auſſerhalb derſelben, in einer andern Fläche IH, (welche verſtanden wird durch die zween Puncten E und F durchgezogen zu ſeyn) liege.

Worauff aber folgete, daß hierdurch zwey gerade Linien EGF und EF, welche aus einerley Endes-Puncten E und F gezogen ſeint, den Platz EGF einſchlieſſeten, welches ungereimt iſt. S. 12. ax. 1.

Dahero ſchlieſſet man, daß die gerade EF nothwendig auff derſelben Fläche KL, worauff die Parallel-Linien AB, CD ſeynd, liege.

Welches zu beweiſen ware.



Die VIII. Borgab.

Betrachtung.

Wann zwey Parallel-Linien ſeint, von welcher eine auff einer Fläche bleyrecht ſtehet, ſo wird auch die andere auff derſelben Fläche bleyrecht ſtehen.

Es iſt gegeben, daß die zwey Linien AB und CD einander Parallel ſeint, und daß die eine CD auff der Fläche FG ⊥ ſtehe. Dieſem nach ſagt man, daß auch die andere AB auff derſelben Fläche FG bleyrecht ſtehe.

Zubereitung.

Ziehe AC und AD zuſammen.
Auff AC und aus A, mache die ⊥ AE ⊓, der Linie CD.
Hange EC, und ED zuſammen.

Beweiß.

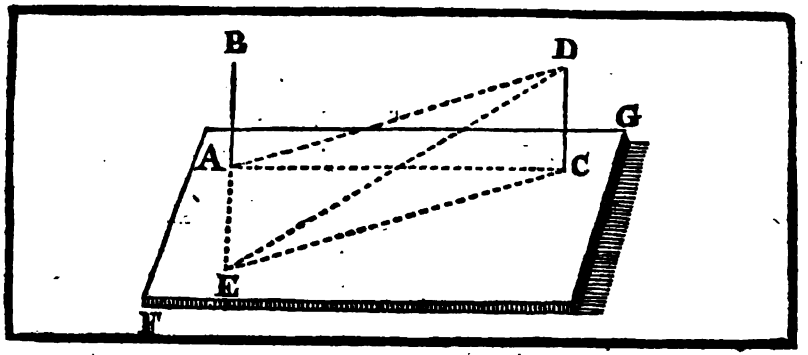
Erſtlich iſt klar (weilen die gezogene gerade Linie AC auff der Fläche FG lieget, worauff auch CD ⊥ ſtehet), daß der ∠ DCA ein rechter ſeye. d. 3. def. 11.

Es ſeynd unterdeſſen die zween ∠ DCA, und BAC ⊓, zwey rechten ∠. d. 29. 1.
Folget, daß auch der ∠ BAC ein rechter ∠ ſeye.

Nunmehro ſeynd in denen zween △ DCA, und EAC die Seiten CD ⊓, der Seiten AE, und die Seiten AC iſt beyden △ gemein, d. d. Zuſ.
und der ∠ DCA ⊓. dem ∠ BAE (dann ſie beyde rechte ſeynd).

Dahero iſt auch die Baſis AD ⊓, der Baſis EC. d. 4. 1.

Abermahlen in denen zween △ DCE und EAD iſt die Seiten ED beyden △ gemein, und die Seiten CD iſt ⊓ der Seiten AE; d. d. Zuſ.
ſo iſt auch bewieſen worden, daß AD ⊓ ſeye, der EC,



Folget, daß der △ DCE ⊓ ſeye, dem △ EAD.
und alſo der ∠ DCE ⊓, dem ∠ EAD. d. 8. 1.

Der ∠ DCE iſt aber ein rechter ∠. d. 3. def. 1.
Dahero auch der ∠ EAD ein rechter ∠ ſeyn werde.

Weilen nun die gerade Linie E. auff beyden geraden Linien
AC und AD ⊥ ſtehet:

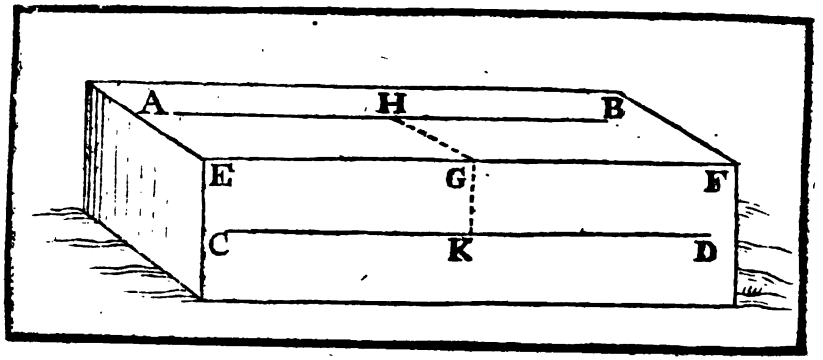
So ſtehet ſie auch ⊥ auff der Fläche (welche durchgezogen zu ſeyn
durch die Linien AC und AD verſtanden wird). d. 4. 11.

In ſelbiger Fläche aber ſtehet auch die gerade Linie BA.
(dann AC, und AD ſeynd in derſelben Fläche, worauff die Parallel- d. 7. 11.
Linien AB und CD liegen).

Dahero ſtehet die gerade Linie EA auch ⊥ auff AB.

Auß dieſen ſchlieſſet man, daß alſo AB, indeme ſie ſo wol auff EA,
als auff AC, ⊥ ſtehet, (auch auff der Fläche, welche durch EA und
AC durchgezogen verſtanden wird (das iſt, auff der Fläche
FG) ⊥ ſtehe. d. 4. 11.

Welches zu beweiſen ware.



Die IX. Vorgab.

Betrachtung.

Gerade Linien, welche einer andern geraden Linie Parallel seynd (obwolen sie nicht auff einerley Fläche liegen,) seynd auch unter einander Parallel.

Es seynd gegeben AB, und CD ═, der geraden Linie EF; wie wohl nun AB und CD in verschiedenen Flächen liegen, so saget man, daß dennoch AB ═ seye, der CD. und dahero alle drey Linien AB, EF, CD einander ═.

Zubereitung.

Auff der Fläche ABFE ziehe auß AB nach Gefallen an die Linie EF die ⊥ HG. d. 11. I.

Wiederumb auff der Fläche EFDC ziehe aus CD in Punct G die ⊥ GK. d. 12. I.

Beweiß.

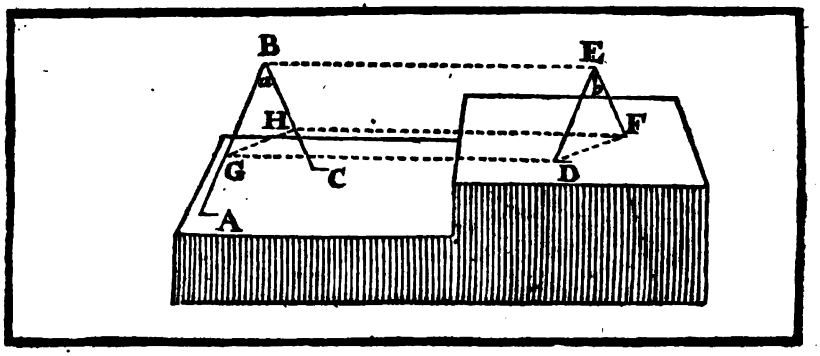
Weilen EF ⊥ ist beyden GH und GK.
so wird sie auch ⊥ stehen auff der Fläche, welche durchgezogen verstanden wird durch HGK. d. d. Zus.

Unterdessen ist gegeben, daß AB ═ seye, der EF, und
EF ist bewiesen worden, daß sie ⊥ seye auff der Fläche, welche durch HGK gezogen verstanden wird. d. 4. II.

Folget, daß auch AB auff eben derselben Fläche ⊥ stehe.
auff solche Weise stehet auch CD auff derselben Fläche ⊥. d. 8. II.

Dahero schliesset man, weilen die gerade Linien AB, CD auff einer Fläche, nemlich auff der Fläche, welche durch HGK gezogen, verstanden wird, ⊥ stehen, daß AB ═ seye der CD. d. 6. II.

Welches zu beweisen ware.



Die X. Vorgab.

Betrachtung.

Warn zwey gerade Linien, welche ſich einander anrühren, Parallel ſeint, andern zwey geraden Linien, welche ſich auch einander anrühren; wiewolen ſie nicht auff einer Fläche allein liegen oder ſtehen: ſo werden ſie dannoch gleiche Winckeln machen.

Es ſeynd gegeben die gerade Linien AB, CB, welche ſich anrühren in B, und Parallel ſeint, denen zwo geraden Linien DE, FE, welche ſich anrühren in E, es ſeint auch AB, CB in einer verſchiedenen Fläche, als DE, FE. Dieſem nach ſaget man, daß nichts deſtoweniger der ∠a ⊓ ſeye, dem ∠b.

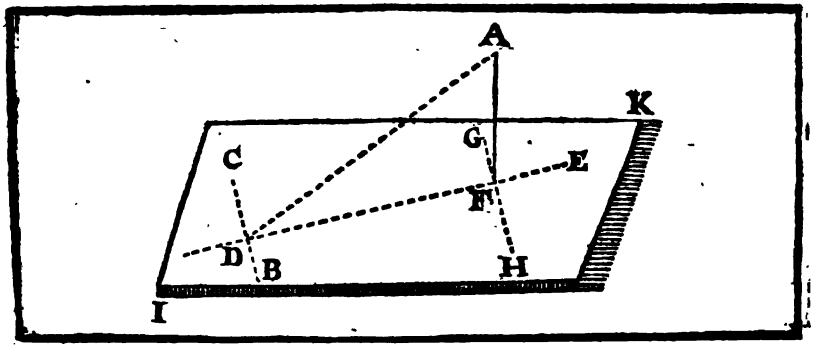
Zubereitung.

Mache BG ⊓, ED, und BH ⊓, der EF.
Hange zuſammen GD, BE, HF, und GH, DF.

Beweiß.

Die Linie GB iſt ⊓, und ═, der Linie DE. [d. d. Zub. u d. Vorg.
Daheko iſt die Linie GD auch ⊓, und ═, der Linie BE. d. 33. I.
Eben auff ſolche Weiſe iſt die Linie HF ⊓, und ═, der Linie BE.

und folgends die Linie GD ⊓, und ═, der Linie HF. [d. 9. II. und ax. I.
Auch deßwegen iſt die Linie GH ⊓, und ═, der Linie DF. d. 33. I.
Weilen nun in denen zween △ GBH, und DEF, die zwo Seiten GB und HB ⊓ ſeynd, denen zwo Seiten DE, und FE. d. d. Zub.
und die Baſis GH iſt ⊓ bewieſen worden, der Baſis DF.
So folget letztlich, daß der ∠a ⊓ ſeye, dem ∠b. d. 8. I.
Welches zu beweiſen ware.



Die XI. Vorgab.

Handgriff.

Auß einem Puncten in der Höhe (gleich wie auß A) eine bleyrechte Linie (nemlich AF) in die untergelegte Fläche (IK) herunter zu lassen.

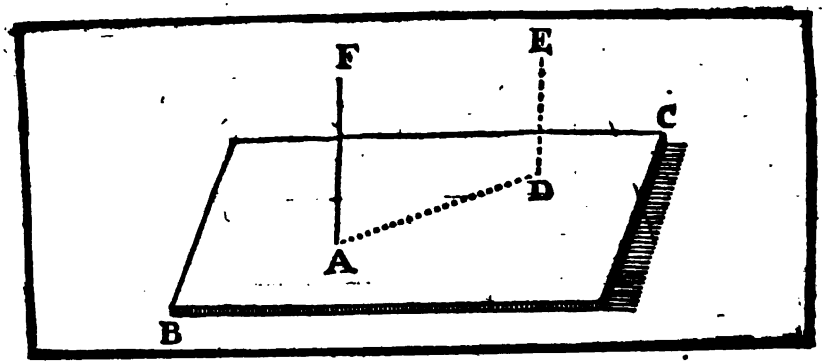
Handgriff.

Ziehe auff der Fläche IK nach Gefallen eine gerade Linie CB.
Auß A ziehe auff CB hinunter, die ⊥ AD. d. 12. 1.
Mache auß dem Punct D auff CB die ⊥ DE. d. 11. 1.
Auß A auff DE, lasse herunter die ⊥ AF fallen. d. 12. 1.
Nun sage ich, daß AF auch ⊥ stehen werde auff der Fläche IK.
Ziehe vorhero durch F die Linie GFH ═, der Linie CDB. d. 31. 1.

Beweiß.

Die gerade Linie BC ist ⊥ auff denen zwo Linien DA und DE. d. d. Hand.
Darum stehet sie auch ⊥ auff der Fläche, welche durch DA und DE gezogen verstanden wird. d. 4. 11.
Weilen auch GH ═ ist, der CDB, so wird eben GF ⊥ stehen, auff derselben Fläche, welche durch DA und DE gezogen verstanden wird. d. 8. 11.
Indeme aber AF in derselben Fläche, worauff die Linien DA, und DE seint, lieget, und GF in F berühret:
So wird der ∠ GFA ein rechter ∠ seyn. d. 3. def. 11.
Es ist auch der ∠ AFD ein rechter ∠, gemacht worden. d. 9. Hand.
Dahero, weilen AF auff denen zwey Linien DE und GF ⊥ stehet, so wird dieselbe AF auch ⊥ auff der Fläche IK stehen. d. 4. 11.

Welches zu machen ware.



Die XII. Vorgab.

Handgriff.

Auff einer Fläche, und auß einem darauff gegebenen Puncten eine bleyrechte Linie zu erhöhen.

Es ist gegeben auff der Fläche BC der Punct A, auß welchem eine ⊥ zu erhöhen seye.

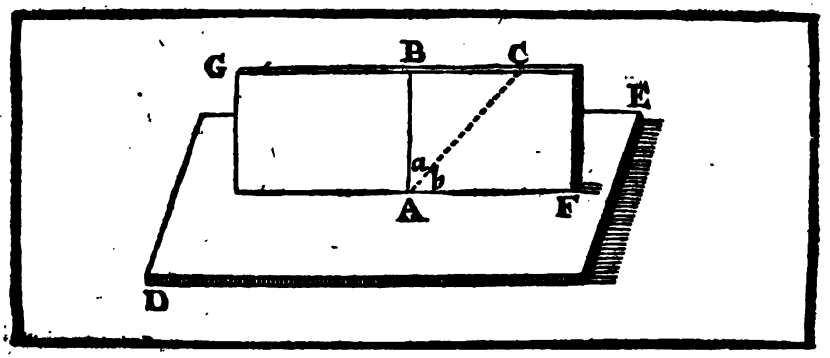
Handgriff.

Nehme nach Gefallen in der Höhe den Punct E.
Lasse auß E die bleyrechte Linie ED hinunter fallen. d. 11. 11.
Auß dem Punct A ziehe AF ═, der DE. d. 31. 1.
so wird AF die verlangte ⊥ seyn, welche auff der Fläche BC hat sollen erhöhet werden.
Ziehe A. D. zusammen.

Beweiß.

Die Linie AF ist ═, der DE. d. d. Hand.
Die Linie DE aber stehet ⊥ auff der Fläche BC. d. d. Vorg.
Folget, daß auch die Linie AF ⊥ stehe auff derselben Fläche BC. d. 8. 11.

Welches zu machen ware.



Die XIII. Vorgab.

Betrachtung.

Auß einem Puncten auff einer Fläche, kan nur eine bleyrechte Linie auff einerley Seiten erhoben werden.

Es iſt gegeben die Fläche DE, und der Punct A darauff. Dieſem nach ſagt man, daß auß dem gegebenen Punct A nicht mehr bleyrechte, als nur die eine AB. auff einerley Seiten könne überhoben werden.

Beweiß.

Wann es möglich iſt, zulaſſe man, daß zu einem Exempel die zwey bleyrechte AB. AC auß dem Punct A auff der Fläche DE ſeynd erhoben worden.

Seye unterdeſſen verſtanden, als wann die Fläche GF durch beyde ⊥ AB, AC, (welche dahero auff einer Fläche ſeynd) gezogen wäre.

Dieſem nach folget (weilen beyde Linien AB. AC ⊥ auff der Fläche DE ſeynd), daß der ∠ a + b und der ∠ b zwey rechte ∠ ſeynd. d. 3. def. 11.

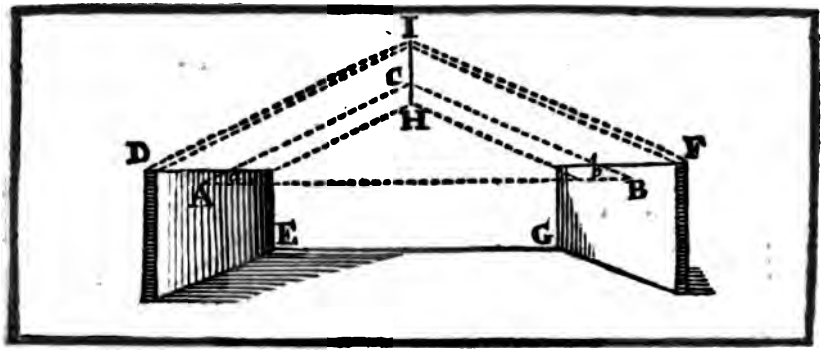
und darumb einander gleich, (nemlich ein gantzes ſeinem Theil), welches ungereimt iſt.

Daranß dann zu ſchlieſſen iſt, daß auff der vorgegebenen Fläche DE, und auß dem darauff gegebenen Punct A nur eine ⊥, gleichwie AB, auff einerley Seiten kan erhoben werden;

Welches zu beweiſen ware.

Anmerckung.

So können auch nicht zwey ⊥ auß einem Punct, welcher in der Höhe iſt, auff die unterlegte Fläche gezogen werden. Die Urſach iſt, daß (wann ſolche zwey ⊥ auff einer Fläche allein gezogen würden, wegen gleichen, daß iſt, rechten ∠ ſothane ⊥ einander = wären. (d. 6. 11.) Diß aber iſt ungereimt, maſſen ſie auß einem Puncten gezogen ſeynd.



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

Diejene Fläche, darauff eine gerade Linie beyderſeits bleyrecht ſtehet, ſeynd einander Parallel.

Es iſt gegeben, daß die gerade Linie AB beyderſeits bleyrecht ſtehet auff denen Flächen DE und GF. Dieſem nach ſagt man, daß die Fläche DE = ſeye, der Fläche GF.

Beweiß.

Sagete man, es wären die zwey Flächen DE, FG nicht einander =; ſo gebete man ſtracks zur Antwort, daß ſolche dann, nothwendig gegen einer Seiten werden zuſammen kommen müſſen; Seye dahero ihr gemeiner Durchſchnitt HI.

In dieſem Durchſchnitt nehme ohngefehr den Punct C, und ziehe AC und BC auff denen Flächen DE und GF.

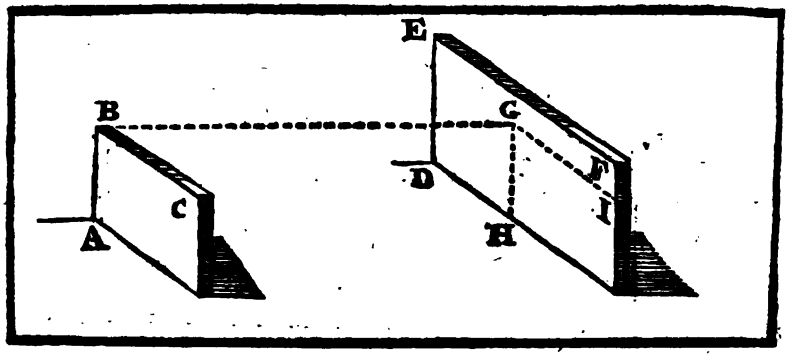
Dieweilen nun die gerade Linie AB, ſo wohl auff der Fläche DE, als auff der Fläche GF ⊥ ſtehet: d. d. Vorg.

So folget, daß in dem △ ACB, die zwey ∠ a und b zwey rechte ∠ ſeynd.

Diß aber kan nicht ſeyn, maſſen alle drey ∠ ſammentlich eines △ nur zwey rechten ∠ gleich ſeint. d. 17. 1.

Dahero ſchlieſſet man, daß noch wahr ſeye, daß die Fläche DE, GF, worauff beyderſeits die gerade Linie AB ⊥ ſtehet, einander = ſeynd.

Welches zu beweiſen ware.



Die XV. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwey gerade Linien, welche einander sich berühren, Parallel seynd zweyen andern geraden Linien, welche sich auch in einem Punct berühren, nicht aber auff einerley Fläche liegen: so seynd auch die Flächen, welche durch sothane Linien gezogen werden, einander Parallel.

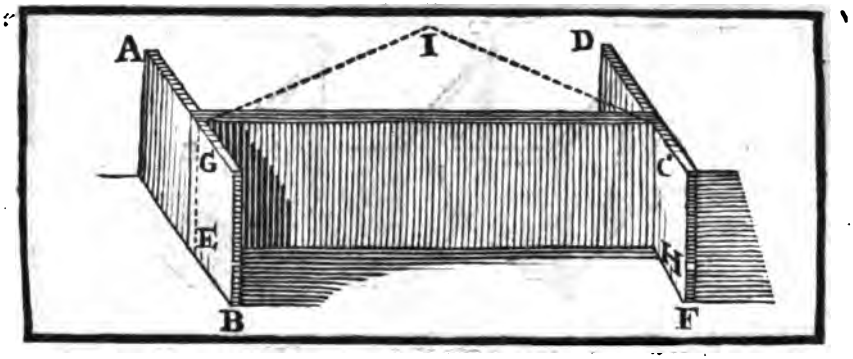
Es ist gegeben, daß die zwey geraden Linien AB, BC, welche sich in B berühren, ∥ seynt, andern zwey geraden Linien DE, EF, welche sich auch berühren in E, und in einer andern Fläche liegen. Diesem nach sagt man, daß die Fläche ABC und DEF, welche durch die Linien AB, BC, und DE, FF gezogen worden, einander ∥ seynd.

Ziehe vorhero auß B die Linie GB ⊥ auff die Fläche DEF. d. 11. 11.
Hernach auß G ziehe GH ∥ denen ED und EF. d. 31. 1.

Beweiß.

Es ist klar, daß die Linien GH, GI ∥ seynt, denen BA und BC. d. 9. 11.
Nunmehro, weilen BC ∥ ist, der GI:
so werden die zween ∠ GBC und BGI □ seyn, zween rechten ∠. d. 29. 1.
Der ∠ BGI aber, ist ein recheter gemacht worden. d. d. Zub.
Darumb auch der ∠ GBC ein rechter ∠ seyn werde.
Eben auff diese Weise wird bewiesen, daß auch der ∠ GBA ein rechter seye.
Darauff folget, daß also die Linie GB ⊥ auff der Fläche ABC stehe. d. 4. 11.
Es ist auch dieselbe GB ⊥ gemacht worden auff der Fläche DEF. d. d. Zub.
Dahero schliesset man, daß die Fläche ABC ∥ seye, der Fläche DEF. d. 14. 11.

Welches zu beweisen ware.



Die XVI. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwey Parallel-Flächen mit einer andern Fläche durchſchnitten werden: ſo werden auch ihre gemeine Durchſchnitte einander Parallel ſeyn.

Es iſt gegeben, daß die zwey Parallel-Fläche AB, DF mit der Fläche EG, CH durchſchnitten worden ſeynd. Dieſem nach ſaget man, daß ihre gemeine Durchſchnitte EG, HC auch einander Parallel ſeynd.

Beweiß.

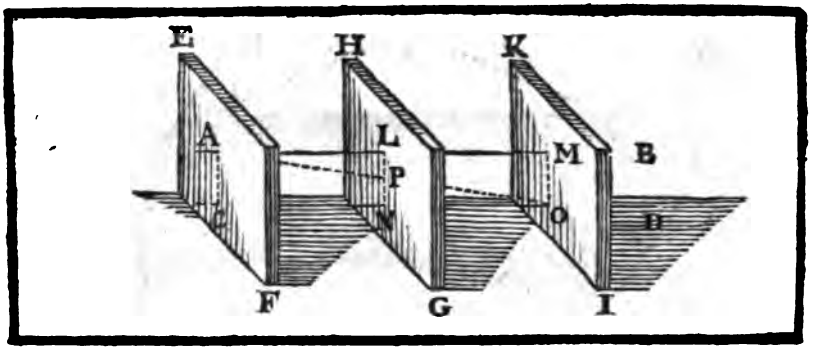
Will man es nicht geſtehen, daß dieſe zwey Durchſchnitte, oder gerade Linien EG, HC einander = ſeynd: ſo werden ſie nothwendig in einem Punct (geſetzt als wie in I) zummen kommen müſſen.

Worauff aber folget, daß nothwendig die Fläche AB und DF auch in demſelben Punct I werden zuſammen kommen, und ſich alldorten durchſchneiden müſſen. d. I. II.
(dann die gerade Linie EGI völlig auff der Fläche AB, und die gerade Linie HCI völlig auff der Fläche DF zu liegen kommet).

Diß aber kan nicht ſeyn, indeme die Fläche AB anfänglich = gegeben worden iſt, der Fläche DF. d. d. Vorg.

Dahero noch warhafftig iſt, daß die Durchſchnitte EG und HC einander = ſeyn müſſen.

Welches zu beweiſen ware.



Die XVII. Vorgab.

Betrachtung.

Zwey gerade Linien werden mit Parallel-Flächen proportionirlich durchschnitten.

Es seynd gegeben die zwey gerade Linien AB, CD, welche durchschnitten seynd von denen Parallel-Flächen EF, HG, KI, in denen Puncten A, L, M, und C, N, O. Diesem nach sagt man, daß die zwey gerade Linien AB, CD proportionirlich durchschnitten seynd, nemlich daß seye AL, LM:: CN, NO.

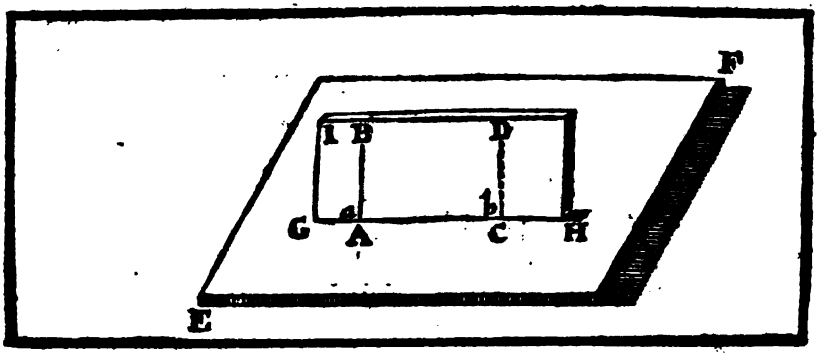
Zubereitung.

Ziehe AC, MO zusammen.
So hange auch AO mit einer geraden Linie zusammen, welche die Fläche HG durchschneidet im Punct P.
Ziehe PL, PN zusammen.

Beweiß.

Nunmehro, weilen die Parallel-Flächen KI, HG durchschnitten seint mit der Fläche deß △ AOM.
So werden ihre gemeine Durchschnitte MO, LP einander = seyn. d. 16. 11.
Eben auff diese Weise werden AC, und PN einander = seyn.
Dessentwegen ist AP, PO :: AL, LM, d. 2. 6.
und auch AP, PO:: CN, NO.
Letztlich AL, LM:: CN, NO. d. 9. 5.

Welches zu beweisen ware.



Die XVIII. Vorgab.

Betrachtung.

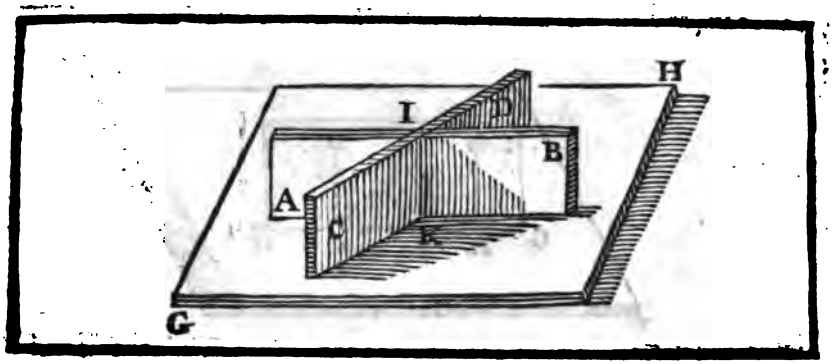
Wann eine gerade Linie auff einer Fläche bleyrecht ſtehet: ſo werden alle die jene Flächen, welche durch dieſe gezogen werden, auch auff derſelben Fläche bleyrecht ſtehen.

Es iſt gegeben die Linie AB ⊥ auff der Fläche EF. Dieſem nach ſagt man, daß alle Flächen, gleich wie die Fläche GIH, welche durch AB gezogen ſeynd, auch ⊥ auf derſelben Fläche EF ſtehen.

Beweiß.

Seye erſtlich der gemeine Durchſchnitt der Fläche GIH und EF die gerade Linie GH.
Nehme darauff nach Gefallen den Punct C.
Auß C in der Fläche GIH ziehe CD ═, der AB. d. 31. I.
Dieſem nach, weilen die Linie AB ═ iſt, der Linie CD,
Die Linie AB aber gegeben iſt ⊥ auff der Fläche EF. d. d. Vorg.
So wird CD auch auff derſelben Fläche EF ⊥ ſtehen, d. 8. II.
und darumb iſt ſie auch ⊥ auff dem gemeinen Durchſchnitt GH: d. 3. def. II.
Auff ſolche Weiſe werden alle Linien, welche in der Fläche GIH der geraden Linie AB ═ gezogen ſeynd, ⊥ auff der Fläche EF, und folgends auch ⊥ auff dem gemeinen Durchſchnitt GH ſtehen.
Und dahero muß auch die Fläche GIH auff der Fläche EF ⊥ ſtehen. d. 4. def. II.

Welches zu beweiſen ware.



Die XIX. Vorgab.

Betrachtung.

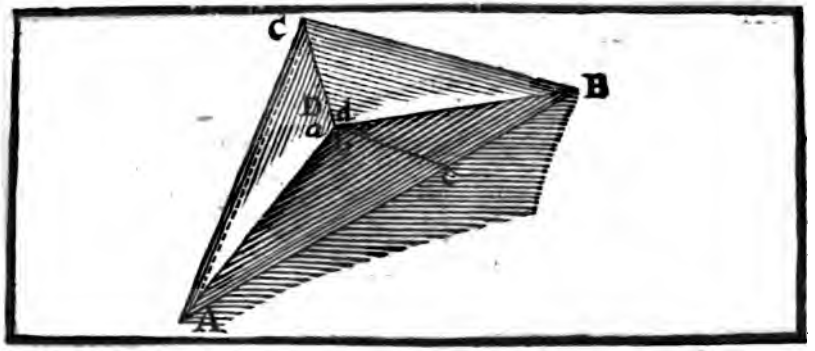
Wann zwey Flächen sich einander durchschneiden, und auff einerley Fläche bleyrecht stehen: so wird auch der gemeine Durchschnitt auff derselben Fläche bleyrecht stehen.

Es seynd gegeben die zwey Flächen AB, CD, welche bleyrecht auff der Fläche GH stehen, und sich einander durchschneiden. Diesem nach sagt man, daß auch ihr gemeiner Durchschnitt KI auff derselben Fläche bleyrecht stehe.

Beweiß.

Die zwey Flächen AB und CD stehen ⊥ auff der Fläche GH. d. d. Vorg.
Dahero kan auff der Fläche GH auß dem gemeinen Punct K in beyde Flächen AB und CD eine ⊥ gezogen werden. d. 4. def. 11.
Auß einem Punct K aber können nicht mehr, als nur eine ⊥ (gleich wie KI) auff der Fläche GH erhoben werden. d. 13. 11.
Volget dahero, daß der gemeine Durchschnitt KI (welcher dieselbe einige Linie ist) ⊥ auff der Fläche GH stehen müsse. d. 3. 11.

Welches zu machen ware.



Die XX. Vorgab. Betrachtung.

Wann drey flache Winkeln einen dichten Winkel machen; ſo werden darvon zwey zuſammen genommen allzeit gröſſer ſeyn, als der dritte Winckel allein.

Es iſt gegeben der dichte ∠ D zuſammengeſetzter von denen drey flachen ∠ a, d und b + c: Dieſem nach ſagt man, daß aus dieſen dreyen ∠ zwey zuſammen genommen, allzeit ⌜ ſeint, als der dritte allein.

Wann nun erſtlich alle drey ∠ a, d, b + c einander gleich ſeint: ſo iſt klar, daß auß dieſen zwey zuſammen genommen allzeit ⌜ ſeint, als der dritte allein.

Zum anderten, wann nur zwey einander gleich, und der dritte ∠ kleiner, als ein jeder von beyden, iſt: ſo iſt abermal klar, daß von dieſen zwey zuſammen genommen allzeit ⌜ ſeint, als der dritte.

Letztlich, wann alle drey ∠ einander ungleich ſeint, und zwar ſolcher Geſtalt, zu einem Exempel, daß der ∠ b + c unter ihnen der gröſte geſetzt ſeye.

So beweiſet man hiermit, daß dannoch die andere zwey ∠ a und d zuſammen genommen, ⌜ ſeint, als der gröſte ∠ b + c allein.

Zubereitung. Auff der Fläche ADB ziehe nach Gefallen die gerade Linie AB, und mache mit der Linie DE (welche gezogen wird auß D biß AB) den ∠ b ⊓, dem ∠ a. d. 23. I.

Nehme CD ⊓ der DE, und hange AC, CB zuſammen.

Beweiß. In denen zwey △ ADC, und ADE iſt die Seiten AD beyden △ gemein, und die Seiten CD ⊓ der Seiten DE. d. d. Zub.

und der ∠ a ⊓, dem ∠ b.

Dahero iſt auch die Baſis AC ⊓, der Baſis AE. d. 4. I.

Unterdeſſen ſeint die Seiten AC, und CB ⌜, als die Seite AB. d. 20. I.

Wann man nun von denenſelben die zwey gleiche Linien AC, AE darvon ziehet:

So wird doch CB ⌜ verbleiben, als EB. d. 5. ax. I.

Nunmehro iſt in denen zween △ CDB, und EDB, die Seiten DB beyden △ gemein.

Und die Seiten DC iſt ⊓, der Seiten DE.

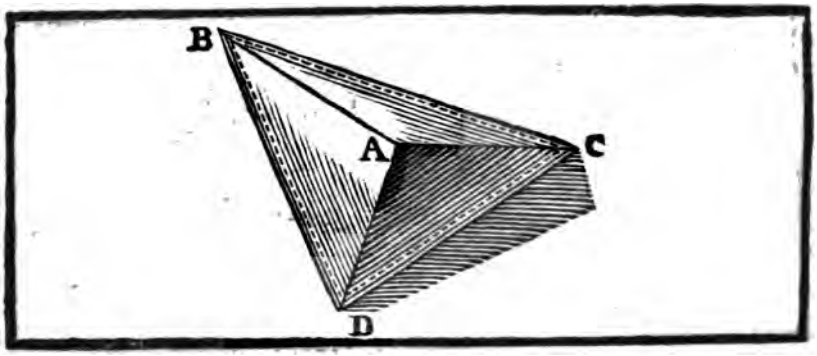
Die Baſis CB aber iſt ⌜, als die Baſis EB. d. d. Vorg.

Dahero iſt auch der ∠ d ⌜, als der ∠ c. d. 25. I.

Wann man nun zu dieſen ungl. ∠ d und c die gleiche ∠ a und b beyderſeits hinzu ſetzet:

So folget, daß auch die zween ∠ a und d ⌜ ſeint, als der ∠ b + c. d. 4. ax. I.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXI. Vorgab.

Betrachtung.

Alle flache Winckeln ſammentlich, welche einen dichten Winckel machen, ſeint kleiner, als vier rechte Winckeln.

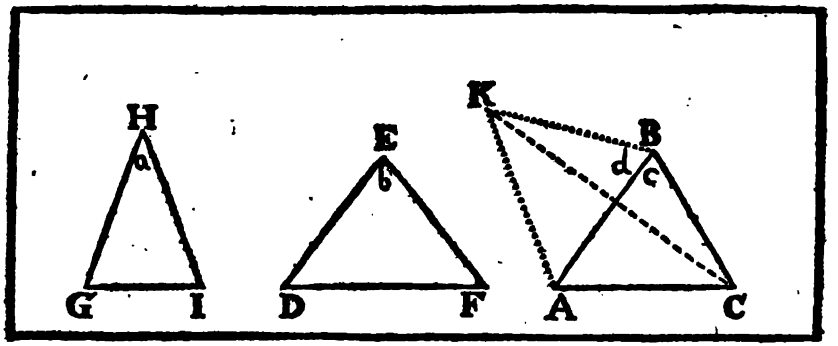
Es iſt gegeben der dichte ∠ A, ſo zuſammen geſetzt iſt von denen drey flachen ∠ DAB. BAC. CAD. Dieſem nach ſagt man, daß dieſe drey ∠ ſammentlich ⌝ ſeynt, als vier rechte ∠.

Zubereitung.

Hange zuſammen die auff der Baſis nach Gefallen genommene Puncten DBC. Woraus entſtehen die drey dichte ∠ bey D, B, C, von denen ein jeder auß drey flachen ∠ zuſammen geſetzt iſt. Nemlich der ∠ D iſt von denen ∠ CDB, CDA, BDA, und der ∠ B iſt von denen ∠ DBC, DBA, CBA. Letztlich der ∠ C iſt von denen ∠ BCD, BCA, DCA zuſammen geſetzt.

Beweiß.

In dem dichten ∠ D ſeynd die zween ∠ CDA + BDA ⌜, als der ∠ CDB. b. 20. 11.
Auff ſolche Weiſe ſeynd auch die zween ∠ DBA + CBA ⌜, als der ∠ DBC.
Und die zween ∠ BCA + DCA auch ⌜, als der ∠ BCD.
Das iſt, die ſechs ∠ CDA + BDA. DBA + CBA: BCA + DCA ſeynd ⌜, als die drey ∠ CDB. DBC. BCD deß flachen △ CDB.
Unterdeſſen ſeynd die drey letztere ∠ ⌐, zweyen rechten ∠. b. 32. 1.
Folget, daß auch dieſe ſechs ∠ ⌜ ſeynd, als zween rechte ∠.
Nun aber alle neun ∠, deren drey △ DAB, BAC, CAD ſeynd ⌐ ſechs rechten ∠. b. 32 Cor 2.
Wann man jetzund von denen ſechs rechten ∠, die ſechs ∠ CDA + BDA. DBA + CBA. BCA + DCA (welche ⌜, als zween rechte ſeynd) abziehet,
So werden die übrige flache ∠ umb A ⌝ ſeyn müſſen, als vier rechte ∠.
Welches zu beweiſen ware.



Die XXII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann drey flache Winckeln ſeynd, deren jede zwey zuſammen genommen gröſſer ſeynd, als der dritte; und die Seiten, welche ſothane Winckeln begreiffen, einander gleich haben: So iſt möglich, daß man aus denen geraden Linien, welche die gleichen Seiten an einander hangen, einen Triangel machen könne.

Es ſeynd gegeben die drey ∠ a, b, c, darvon zween zuſammen genommen, gleichwie die ∠ b + c, jederzeit ⌜ ſeynd, als der dritte ∠ a; ſolche drey ∠ auch von gleich langen Linien GH, HI und DE, EF und AB, BC begriffen ſeynd. Dieſem nach ſagt man, daß es möglich ſeye, auß denen drey Linien GI, DF und AC, welche die gleiche Seiten an einander hangen, einen △ zu machen. Das iſt, wann bewieſen wird, das, geſtalt dieſer Sachen, auß dieſen drey Linien, zwey zuſammen genommen, (als wie allhier DF + AC) allzeit ⌜ ſeynd, als die dritte GI: ſollan alsdann ein △ gemacht werden. (nach d. 22. 1.) Mache vorhero den ∠ d ⌐, dem ∠ b: und BK ⌐, BA, ziehe zuſammen KA, KC.

Beweiß.

Weilen KB ⌐ iſt, der AB: AB aber ⌐ iſt, der DE, oder EF, und der ∠ d ⌐ gemacht worden iſt, dem ∠ b: ſo wird KA ⌐ ſeyn der DF. d. 4. 1

Unterdeſſen iſt der ∠ d + c ⌜, als der ∠ a; folget, daß auch d. d. Vorg.

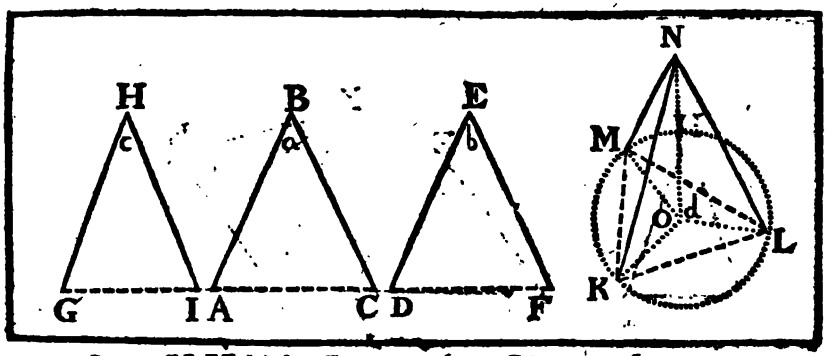
KC ⌜ ſeye, als GI. (dann BC, KB, GH, HI einander ⌐ ſeynd). d. 24. 1.

Entgegen aber iſt KC ¬, als AC + AK) oder die gleiche AC + DF). d. 20. 1.

darum wird GI noch ¬ ſeyn, als AC + DF, und

Deßwegen kan auß dieſen drey Linien GI, DF, AC ein △ gemacht werden. d. 22. 1.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXIII. Vorgab. Betrachtung.

Auß drey vorgegebenen flachen Winckeln, deren nach Gefallen zwey zusammen genommen, allzeit gröſſer als der dritte seynd, einen dichten Winckel zu machen; die drey vorgegebene Winckeln aber müssen sammentlich kleiner seyn, als vier rechte Winckeln.

Es seynd gegeben die drey flache ∠ c, a, b, welche sammentlich ⌐ seynd, als vier rechte ∠, und jede zwey zusammen, ⌐ seint, als der dritte. Diesem nach solte man auß diesen drey ∠ c, a, b einen dichten ∠, gleich wie NKLM machen.

Handgriff. Mache die Linien GH, IH, AB, CB, DE, FE einander gleich.
Hange GI, AC, DF zusammen.

Auß diesen drey Linien GI, AC, DF mache den △ KLM. d. 22. I. u. 22. II.
daß nemlich die Seite KM ⌐ seye, der GI: und KL ⌐, der AC: und LM ⌐, der DF.

Umbschreibe diesen △ KML mit einem Zirckel. d. f. 4.

Auß dem Mittel-Punct O ziehe in die ∠ K, M, L die gerade Linien OK, OM, OL.

Auß dem Mittel Punct O auff der Zirckels-Fläche erhöhe die ⊥ ON. d. 12. II.

Nach diesen, weilen eine jede Linie, als wie AB, oder CB. s. f. welche die ∠ a, b, c machen ⌐ ist, als der halbe Diameter OL.
so von andern nach der Länge schon bewiesen worden ist.

Mache, daß die zwey □ auff OL und ON ⌐ seynd, d. 47. I.
dem □ auff AB (oder dergleichen auff CB) u. s. f.

Letztlich ziehe NL, NK, NM zusammen: so wird der verlangte dichte ∠ NKLM gemacht seyn.

Beweiß.

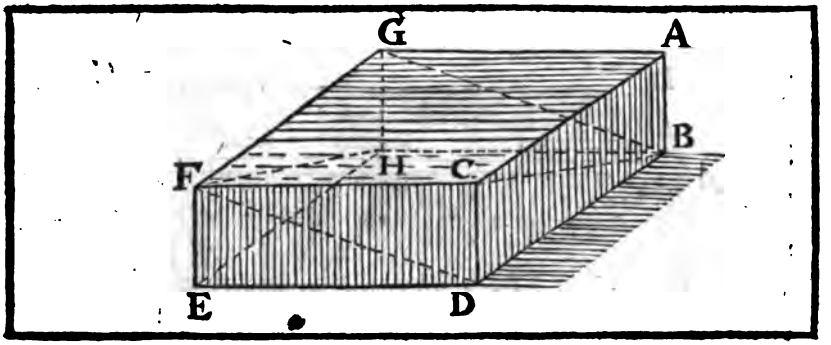
In dem △ NOL ist der ∠ d ein rechter. d. d. Hand.
Dahero wird auch das □ auff LN ⌐ seyn, denen zwey □ auf NO und OL d 47. I.
Denen zwey □ aber auff NO und OL, ist auch ⌐ das □ auff AB. d. d. Hand.
Folget, daß also das □ auff LN ⌐ seye, dem □ auff AB,
und darumb ist die Linie LN ⌐ der Linie AB. d. 46. an. I.

Auff solche Weise ist auch KN ⌐, der BC. Unterdessen ist KL ⌐ gemacht worden, der AC. Dahero ist der △ KNL ⌐, dem △ ABC. d. 8. I.

Eben auff diese Art ist der △ KNM ⌐, dem △ GHI. und der △ MNL ⌐, dem △ DEF.

Und folgends der ∠ KNL ⌐, dem ∠ a, der ∠ KNM ⌐, dem ∠ c. Letztlich der ∠ MNL ⌐, dem ∠ b. Woraus man schliesset, daß also der dichte ∠ NKLM aus denen drey vorgegebenen flachen ∠ a, b, c ist zusammen gesetzt worden.

Welches zu beweisen ware.



Die XXIV. Vorgab.

Betrachtung.

In denen Parallelepipeden ſeynd die gegenüberſtehende Flächen, gleichförmige und ein ander gleiche Parallelogrammen.

Es iſt gegeben das ▱ EFAB, welches mit denen ſechs vierſeitigen Flächen DF, GB, GB, FH, und EB, FA umſchloſſen iſt, von denen jederzeit die zwey gegen überſtehende Seiten einander Parallel ſeynd (nach d. 30. def. 11.) Dieſem nach ſagt man, daß allzeit die zwey gegenüber ſtehende Flächen, gleich wie zu einem Exempel, FD, GB, gleichförmige und einander gleiche ▭ ſeynd. Ziehe vorhero FH, FD, GB, CB zuſammen.

Beweiß.

Weilen die Parallel-Flächen DF, GB durchſchnitten ſeynd mit der Fläche CB: ſo wird die Linie CD = ſeyn, der Linie BA. d. d. Vorg. d. 16. 11.

Auff ſolche Weiſe iſt eben FE =, der HG.

Indeme auch die Parallel-Flächen DF, GB durchſchnitten ſeynd mit der Fläche FA: ſo wird die Linie FC = ſeyn, der Linie GA.

Auff dieſe Weiſe iſt auch die Linie ED =, der Linie HB, und darumb ſeynd FD und GB ▭. d. 35. def. 1.

Eben auff ſolche Weiſe ſeynd auch die übrige überſtehende Flächen, ▭

Berners, maſſen FE, ED = ſeynd, denen GH, HB. d. d. Vorg.

ſo wird der ∠ FED ⌐ ſeyn, dem ∠ GHB. d. 10. 11.

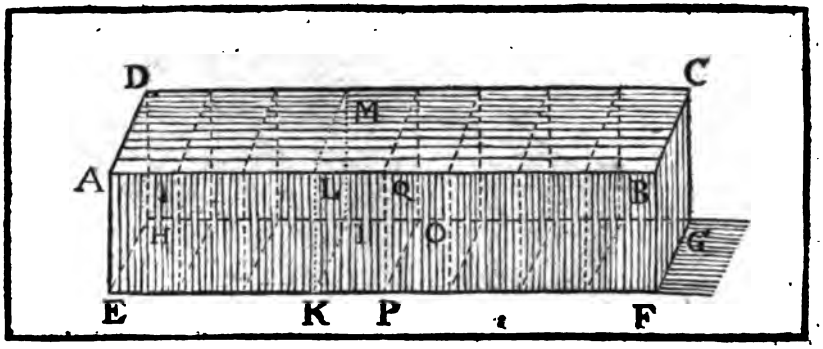
Es ſeynd auch FE, ED ⌐, denen Linien GH, HB. d. 33. 1.

darum iſt der △ FED ⌐, dem △ GHB. d. 4. 1.

Und deßwegen iſt auch der △ FED gleichförmig dem △ GHB. d. 4. 6.

und folgends das ▭ FD ⌐, und gleichförmig, dem ▭ GB, u. ſ. f. d. 6. ax. 1. u. 34. 1.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXV. Vorgab. Betrachtung.

Wann ein Parallelepipedum mit einer Fläche, welche denen gegenüberstehenden Flächen Parallel lauffet, durchschnitten wird: so wird seyn, gleich wie ein Stücks Basis sich verhalket zu des andern stückes Basis, also ist ein dichtes Stück zu dem andern dichten Stück.

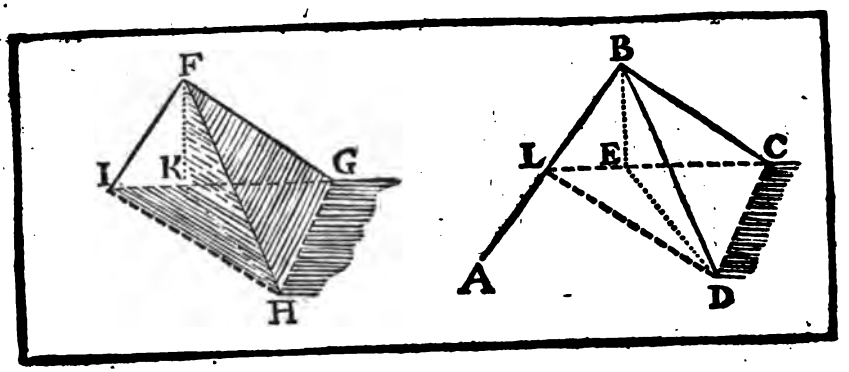
Es ist gegeben, daß das ▭ABGH durchschnitten seye mit der Parallel-Fläche KIML. Diesem nach sagt man, daß, wie die Basis HK, Basis KG :: ▭KD. ▭KC.

Zubereitung.

Suche einen Theil, welcher beyde Bases KH, KG gleich auffmesset.
Seye ein solcher Theil, die Fläche KO, welcher in der Basis KH just dreymahlen, und in der Basis KG just fünff mahlen, begriffen ist.
Ziehe unterdessen durch PO die Fläche QO ═, der Fläche LI,
Woraus der dichte Theil LO entstehet. Diesem nach

Beweiß.

Nun ist klar, daß wegen gleichfachen Theilen, und Parallel-Linien, der dichte Theil LO, so offt in dem dichten Stück KD seye, als offt der flache Theil in der einen Basis KH ist, nemlich just dreymahlen.
Und eben wird derselbe dichte Theil LO so offt in dem dichten Stück KC seyn, als offt der flache Theil KO in der andern Basis KG ist, nemlich just fünff mahlen.
Dahero wie offt die Basis KH einen fünfften Theil von der Basis KG begreiffet, so offt das dichte Stück KD einen fünfften dichten Theil von dem dichten Stück KC begreiffen werde.
Und auch, wie offt die Basis KH zwey fünfftheile von der Basis KG begreiffet, so offt auch das dichte Stück KD zwey Fünfftheile von dem dichten Stück KD begreiffen werde u. s. f.
Darum sich verhalten thut die Basis HK, Basis KG :: ▭KD. ▭KC. (d. 6. def. 5. u. 7.
Welches zu beweisen ware.



Die XXVI. Vorgab.

Handgriff.

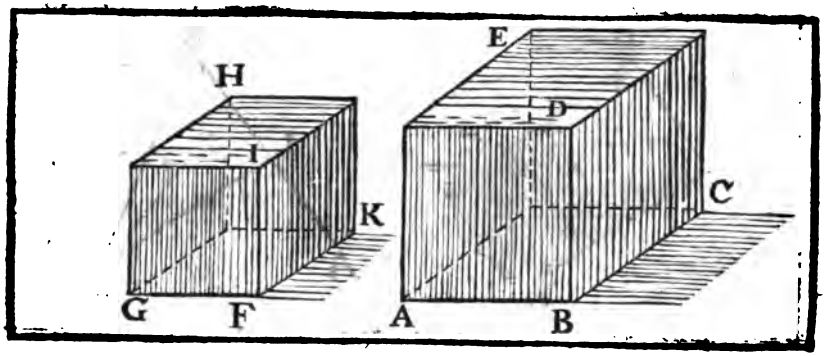
Auß einem Punct auff einer vorgegebenen geraden Linie einen dichten Winckel, gleich einem andern vorgegebenen dichten Winckel, zu machen.

Es iſt gegeben der Punct B auff der Linie AB, auß welchem ein dichter ∠, gleich dem vorgegebenen dichten ∠ FIHG, zu machen ſeye.

Handgriff und Beweiß.

Mache aus H auff der Fläche IHG die bleyrechte HK. d. 11. 11.
Ziehe zuſammen KF, KI, IH, HG, GK.
Mache auff der Linie AB, die BL ⊓, der FI.
Und den flachen ∠ LBC ⊓, dem flachen ∠ IFG. d. 23. 1.
Nehme die Länge BC ⊓, der Länge FG.
Mache auff der Fläche LBC den ∠ LBE ⊓, dem ∠ IFK.
auff der Fläche IFG.
Nehme BE ⊓, der FK.
Auß dem Punct E auff der Fläche LBC erhöhe die ⊥ ED ⊓, d. 12. 11.
der ⊥ KH.
Hange letztlich BD, DC, CE, EL, LD zuſammen.
Der Beweiß iſt auß dem gemachten Handgriff gantz klar und leicht, daß nemlich der dichte ∠ BLCD ⊓ ſeye dem gegebenen dichten ∠ FIHG.

Welches zu machen ware.



Die XXVII. Vorgab.

Handgriff.

An einer vorgegebener geraden Linie (AB) ein Parallelepipedum (BE) zu beſchreiben, welches einem andern vorgegebenen Parallelepipedum (FH) gleichförmig und gleichgeſtölt ſeye.

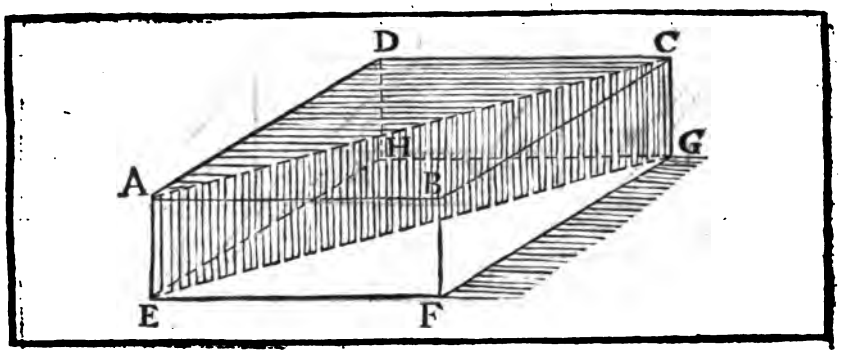
Handgriff.

Auß dem Punct B auff der Linie AB mache den dichten ∠ BADC ⌐, dem dichten ∠ FGIK.
Alsdann mache GF, FI : : AB, BD. d. 26. 6.
und FI, FK : : BD, BC. d. 12. 6.
So wird hernach aus der Gleichen ſeyn GF, FK : : AB, BC. d. 22. 5.
Nun alſo verfertige das ▭ BE, ſo wird ſolches dem vorgegebenen ▭ FH gleichförmig und gleichgeſtölter ſeyn.

Beweiß.

Die drey ▭ AC, AD, DC ſeynd gleichförmig und gleichgeſtölt worden, denen drey ▭ GK, GI, IK. { d. d. Hand. / I. 1. def. 6.
Es ſeynd auch die gegenüberſtehende, gleich und gleichförmige ▭. d. 24. 11.
Dahero werden die ſechs Flächen deß ▭ BE gleich geſtölt und gleichförmig ſeyn, denen ſechs Flächen deß ▭ HF.
Und folgends wird hierdurch das ▭ BE gleichförmig und gleichgeſtölt ſeyn, dem ▭ FH.

Welches zu machen ware.



Die XXVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Ein jedes Parallelepipedum wird durch diejene Fläche, welche durch die überzwerg ſtehende Winckeln gezogen iſt, juſt entzwey geſchnitten.

Es iſt gegeben, daß das ⌲ AG mit der Fläche ACGE, ſo durch die überzwerg ſtehende ∠ A, C, E, G gezogen iſt, durchſchnitten ſeye. Dieſem nach ſagt man, daß das ⌲ AG hiermit juſt entzwey geſchnitten worden ſeye.

Beweiß.

Dieweilen die Fläche BG ein ▭ iſt: ſo werden die Seiten CG, BF einander ⊓, und ═ ſeyn. d. 34. I.

Auff ſolche Weiſe werden auch AE, BF einander ⊓ und ═ ſeyn. und folgends AE ⊓, und ═ ſeyn, der CG. d. 9. II.

Deßwegen iſt auch die Linie AC ⊓, und ═, der Linie EG. d. 39. I.

und darumb iſt ACGE ein ▭ d. 34. def. I.

Unterdeſſen iſt das ▭ ABCD ⊓, und gleichförmig, dem ▭ EFGH. d. 24. II.

Dahero auch die △ ADC, ABC ⊓, und gleichförmig ſeyn werden denen △ EHG, FFG. d. 34. I. und 4. 6.

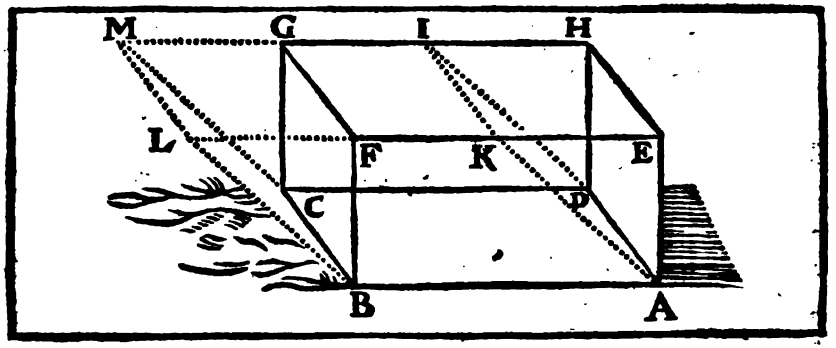
Ferners, ſeynd die ▭ ABFE, BCGF ⊓, und gleichförmig, denen ▭ CGHD, und DHEA. d. 24. II.

Folget, daß alſo in der Eck-Säule AECGDH alle Flächen ⊓, und gleichförmig ſeynd, allen Flächen in der Eck-Säule AECGBF, eine jede der ihren.

Dahero iſt eine Eck-Säule ⊓, der andern Eck-Säule. d. 10. def. II.

Weilen nun dieſe zwey Eck-Säulen das gantze ⌲ AG machen: ſo iſt klar, daß das ⌲ AG mit der Fläche ACGE gerad entzwey ſeye geſchnitten worden.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXIX. Vorgab.

Betrachtung.

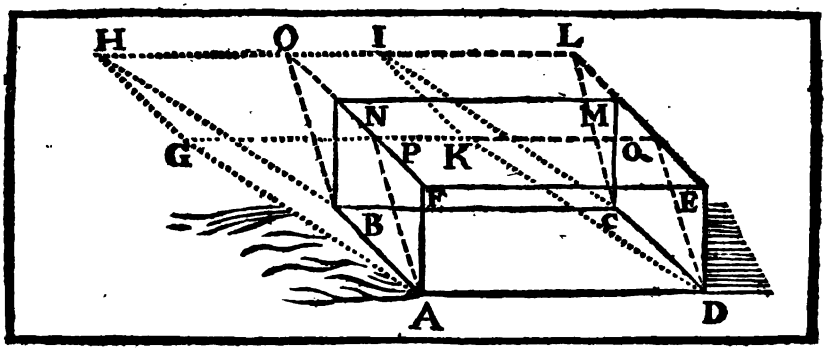
Die Parallelepipeden, welche auff einerley Basis stehen, und einerley Höhe, auch ihre auffstehende Linien in einerley geraden Linien fort haben, seynd einander gleich groß.

Es seynd gegeben die zwey ⊟ AEFBDHGC und AKLBDIMC, welche auff einerley Basis ABCD stehen, und einerley Höhe, auch ihre auffstehende Linien AE, AK, BF, BL, DH, DI, CG, CM in einerley geraden Linien EFL und HGM fort haben. Diesem nach sagt man, daß das ⊟ AEFDHG ⊓ seye, dem ⊟ AKLDIM.

Beweiß.

Das □ DG ist ⊓, dem □ DM. d. 35. 1.
Wann darvon das gemeine Trapezium DIGC abgezogen wird.
So bleibet dannoch der △ DIH ⊓, dem △ CMG.
Auff solche Weise ist auch der △ AKE ⊓, dem △ BLF:
und das □ EKIH ist ⊓, dem □ FLMG. d. 36. 1.
Auch die Fläche AEHD ist ⊓ der Fläche BFCG. } d. 24. 11.
und die Fläche AKID ist ⊓, der Fläche BLMC.
Folget, daß also die Eck-Säule AEKIDH ⊓ seye, der Eck-Säul BFLMGC. d. 10. def. 11.
Wann nun beyderseits das dichte Stück AKFBCGID hinzu gesetzt wird,
So wird letztlich das ⊟ AEFBDHGC ⊓ seyn, dem ⊟ AKLBDIMG.

Welches zu beweisen ware.



Die XXX. Vorgab.

Betrachtung.

Die Parallepipeden, welche auff einerley Baſis ſtehen, und einerley Höhe, nicht aber ihre auffſtehende Linien in einerley Linie fort geſtöltet haben, ſeynd auch einander gleich.

Es ſeynd gegeben die zwey ▱ AFNBCMED, und AGHBCIKD, welche auff einerley Baſis ABCD ſtehen, und einerley Höhe, die auffſtehende Linien aber AF, AG, und BN, BH, und CM, CI, und DE, DK, nicht in einerley Linien EF, MH fort haben. Dieſem nach ſagt man, daß dannoch das ▱ AFNBCMED ⊓ ſeye, dem ▱ AGHBCIKD.

Zubereitung.

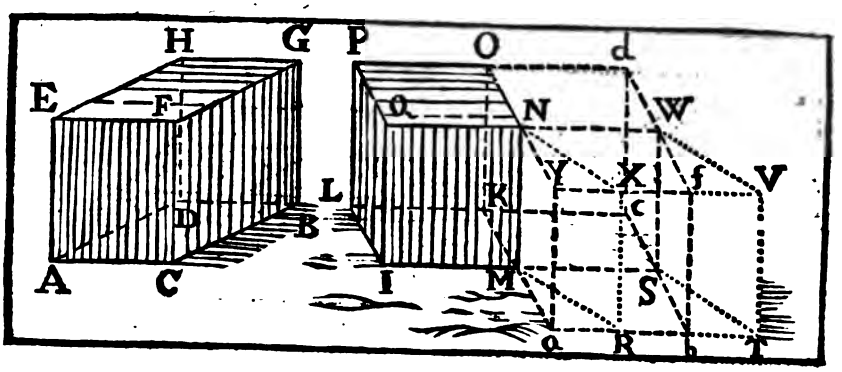
Verlängere HI und EM, biß ſie zuſammen ſtoſſen in Punct L.
Verlängere auch GK biß in Q, und FN biß in O.
Hange zuſammen AP, BO, und DQ, CL.

Beweiß.

Das ▱ AFNBCMED iſt ⊓, dem ▱ APOBCLQD. d. 29. II.
(dann ſie auff einerley Baſis ABCD ſtehen, und einerley Höhe, und ihre auffſtehende AF, AP: BN, BO: CM, CL: DE, DQ in einerley Linie FNO und EML fort haben).

Das ▱ APOBCLQD aber iſt ⊓, dem ▱ AGHBCIKD. d. 29. II.
(dann ſie auch auff einerley Baſis ABCD ſtehen, und einerley Höhe, und ihre auffſtehende Linien AN, AG: BO, BH. CL, CI: DQ, DK in einerley geraden Linien QPG und LOH fort haben)

Dahero iſt auch das ▱ AFNBCMED ⊓, dem ▱ AGHBCIKD.
Welches zu beweiſen ware.



Die XXXI. Vorgab. Betrachtung.

Die Parallepipeden, welche gleiche Baſes, und einerley Höhe haben, ſeynd einander gleich.

Es ſeynd gegeben die zwey ▱ AHGC, und IPOM, welche gleiche Baſes AB, IK, und einerley Höhe haben. Dieſem nach ſagt man, daß das ▱ AHGC ⊓ ſeye, dem ▱ IPOM.

Zweyerley Fähle können ſich hierinnen ereignen, erſtlich, wann die auffſtehenden Linien AE, DH, BG, CF, IQ, LP, KO, MN bleyrecht auff ihren Baſen AB, IK ſtehen; Dieſem nach,

Zubereitung.

Verlängere IM gerad hinauß, und mache MS ⊓, der AD.
Aus dem Punct M auf MS mache den ∠ SMR ⊓, dem ∠ DAC.
Nehme MR ⊓, der AC.
Auß R ziehe RT ⊓, und ═ der MS, und ziehe TS zuſammen.
Alsdann erfülle das ▱ RNWT mit der Höhe MN, welche die Höhe iſt deren zwey gegebenen ▱.
Unterdeſſen verlängere KM, und TR, biß ſie zuſammen ſtoſſen in Punct a.
Hernach durch S, ziehe cSb ═, der KMa.
Verlängere LK, biß ſie an die Linie bSc in Punct c anſtoſſe.
Letztlich erfülle die zwey ▱ aNWb und MOdS mit der Höhe MN, welche die gegebene Höhe deren zwey ▱ iſt.

Beweiß.

Die zwey Linien MS, MR ſeynd ⊓, denen zwey AD, AC, und der ∠ SMR iſt auch ⊓ gemacht worden, dem ∠ DAC. — 8. d. Zuh.
Folget, daß das ▭ MT ⊓, und gleichförmig ſeye, dem ▭ AB. — d. 36. 1.
Weilen auch MS, MN ⊓ ſeynt, denen AD, AE. — d. 20. 6.
(dann AE und MN die gleiche Höhe deren ▱ ſeynd)
und beyde ▭ rechte ∠ begreiffen.
Darum wird das ▭ MW auch ⊓, und gleichförmig ſeyn. dem ▭ AH;
Auff ſolche Weiſe wird bewieſen, daß eben das ▭ Mx ⊓, und gleichförmig ſeye, dem ▭ AF.

Nun hat man drey □ deß ⊖ RNWT ⊓, und gleichförmig, deren drey □ deß ⊖ AHGC.

Dahero ſeynd auch die drey gegenüber ſtehende □ eines ⊖ ⊓, und gleichförmig, denen drey gegenüber ſtehenden □ deß andern ⊖. d. 24. 11.

Und folgends iſt das ⊖ RNWT ⊓, dem AHGC. d. 16. def. 11.

Ferner, indeme die zwey ⊖ aNWb, und RNWT auff einerley Baſis MW ſtehen, und einerley Höhe, auch ihre auffſtehende Linien Ma, MR: NY, NX: Wf, Wv: Sb, ST in geraden Linien Tz, VY fort haben. d. d. Zuß.

So wird das ⊖ aNWb ⊓ ſeyn, dem ⊖ RNWT. d. 29. 11.
das ⊖ RNWT iſt aber bewieſen worden ⊓, dem ⊖ AHGC.

Folget, daß auch das ⊖ aNMb ⊓ ſeye, dem ⊖ AHGC.

Unterdeſſen ſiehet man, daß das ⊖ IPdS durchſchnitten ſeye mit der Fläche ONMK.

Deßwegen iſt, Baſ. IK. Baſ. MC:: ⊖ IPOM. ⊖ MOdS. d. 25. 11.
Abermahlen, weilen man ſiehet, daß das ⊖ aOdb durchſchnitten ſeye, mit der Fläche MNWS.

So wird auch ſeyn, Baſ. aS. Baſ. Mc:: ⊖ aNWb. ⊖ MOdS.

Es iſt aber die Baſis IK ⊓, der Baſis aS. d. d. Vorg.
(dann das □ aS iſt ⊓, dem □ MT. d. 35. 1.
und das □ MT iſt ⊓ gemacht worden, dem □ AB. d. d. Zuß.
und das □ AB iſt ⊓ gegeben worden, dem □ IK) d. d. Vorg.

Darumb wird das ⊖ IPOM ⊓ ſeyn, dem ⊖ aNWb. d. 9. 5.

Dieweilen auch das ⊖ aNWb ſchon bewieſen iſt ⊓, dem ⊖ RNWT. d. d. Vorg.
und das ⊖ RNWT iſt ⊓ gemacht worden, dem ⊖ AHGC. d. d. Zuß.

Folget letztlich, daß auch das ⊖ IPOM ⊓ ſeye, dem ⊖ AHGC.

Welches zum erſten zu beweiſen ware.

II. Wann die auffſtehenden Linien auff denen Baſen ſchrög ſtehen.

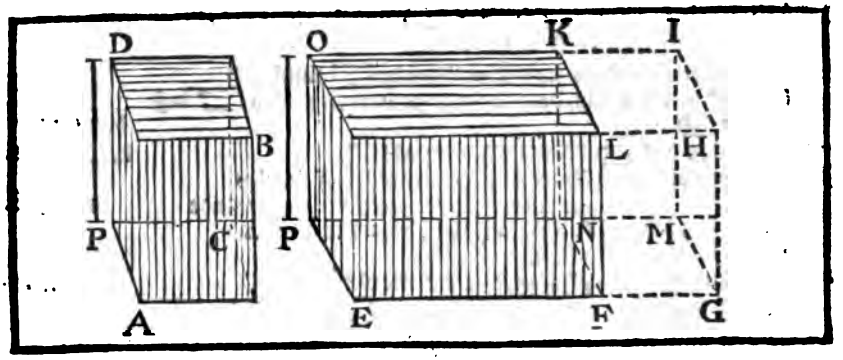
So ſchreibet man auff denenſelben Baſes, und in einerley Höhe andere ⊖, welche ihre auffſtehende (wie vorgehends geſchehen) bleyrecht auff denen Baſes haben.

Gothane ⊖ werden hernach einander gleich ſeyn. d. 31. 11.

Dieſe aber ſeynd ⊓, ihren ſchrögen ⊖. d. 23. 11. u. 30.

Dahero auch die Schröge ⊖ einander ⊓ ſeyn werden.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXII. Vorgab.

Betrachtung.

Die Parallelepipeden, welche in einerley Höhe seynd, verhalten sich gegen einander, gleich wie ihre Baſes.

Es seynd gegeben die ⌲ ADB, EOL, welche einerley Höhe haben. Diesem nach sagt man, daß sich verhalte, das ⌲ ADB, ⌲ EOL : : Baſ. AC. Baſ. EN.

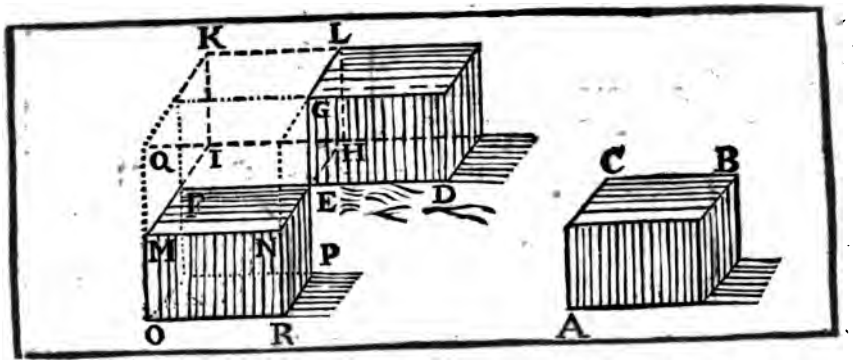
Zubereitung.

An der Linie FN mache das ▭ FM ⌐, dem ▭ AC. d. 45. I.
Alſo, daß der ∠ NFG ⌐ seye, dem ∠ PEF, und
hierdurch die Baſis EM gleichsam ein ▭ allein werde.
Hernach ausfülle das ⌲ EOIG.

Beweiß.

Es iſt klar, daß das ⌲ FKIG ⌐ seye, dem ⌲ ADB. d 31. II.
(dann sie einerley Höhe haben; hernach iſt die Baſis FM ⌐, der d. 8. Zub.
Baſis AC gemacht worden).
Dahero seyn werde ⌲ FKIG. ⌲ EOKF : : ⌲ ADB. ⌲ EOKF. d. 7. 5.
Es verhaltet sich aber das ⌲ FKIG, ⌲ EOKF : : Baſ. FM. Baſ. EN. d. 25. II.
(oder der gleichen AC.)
Folget, daß auch seye das ⌲ ADB, ⌲ EOKF : : Baſ. AC. Baſ. EN.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXIII. Vorgab.

Betrachtung.

Gleichförmige Parallelepipeden ſtehen gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß, ihrer gleichförmig-haltnuß-ſagenden Seiten.

Es ſeynd gegeben die gleichförmige ▱ DL und AB, und die Seiten DE gleichförmig-haltnuß-ſagend, der Seite BC. Dieſem nach ſagt man, daß das ▱ DL ſich verhalte, zu dem ▱ AB in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-ſagenden Seiten DE zu BC.

Zubereitung.

Verlängere DE, und mache EF ⊓, der BC.

An EF mache ſolcher geſtalt das ▱ EO, daß es nicht allein ⊓, gleichförmig und gleichgeſtölt ſeye dem ▱ AB, ſondern auch, das DEF, HEN, GEP in geraden Linien fortliegen. {d. 45. I. u. 27. 11.

Hernach erfülle das ▱ EQ auff die Art als wann das ▱ PQ nur ein ▱ allein wäre. Eben auff dieſe Weiſe erfülle das ▱ EK alſo, daß das ▱ DK nur ein ▱ allein zu ſeyn ſcheine.

Dieſem nach ſtehet zu beweiſen, daß erſtlich die vier ▱ DL, EK, EQ, EO. vier ſtets geproportionirte Gröſſe ſeynd, und zwar in der Verhaltnuß, welche DE zu EF (oder dergleichen CB) hat: das übrige folget vor ſich ſelbſt.

Beweiß.

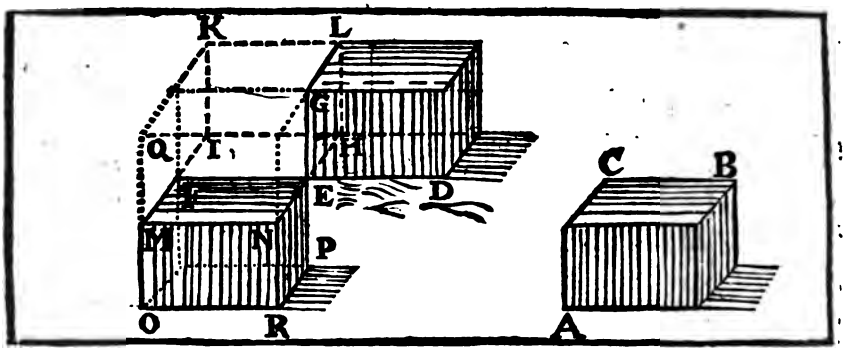
Erſtlich iſt klar, daß wegen der Gleichförmigkeit deren ▱ DL und EO ſich verhalte DE, EH :: EF, EN. {d. 9. def. 11. u. 1. def. 6.

Und durch die Verwexlung DE, EF :: EH. EN. d. 16. 5.

ſich auch verhalte DE, EG :: EF, EP.

Und durch die Verwexlung DE, EF :: EG, EP. d. 16. 5.

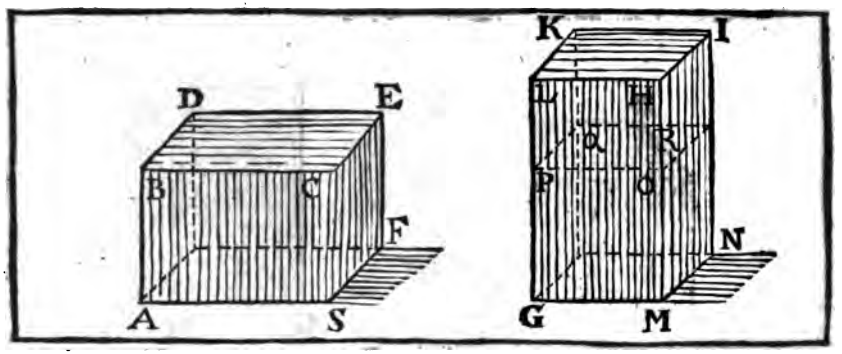
Darum ſeynd die Verhaltnuſſen DE zu EF, und EH zu EN, und EG zu EP. d. 11. 5. einander gleich, nemlich alle ⊓, der Verhaltnuß DE zu BC. Dieſem nach



Weilen das ▱ DK durchſchnitten iſt mit der Parallel-Fläche EL. d. d. Zuß.
ſo wird ſeyn als wie Baſis DH, Baſis EI :: ▱ DL. ▱ EK. d. 25. 11.
Es iſt aber die Baſis oder □ DH, □ EI :: DE, EF. d. 1. 6.
Darum iſt auch wie DE, EF :: ▱ DL, ▱ EK. d. 11. 5.
Weilen auch das ▱ HQ durchſchnitten iſt mit der Parallel-Fläche FG. d. d. Zuß.
ſo wird auch ſeyn das ▱ EK, ▱ EQ :: als wie Baſis HF,
Baſis EM. d. 25. 11.
Und die Baſis oder □ HF iſt zu den □ EM :: als wie EH, EN. d. 1. 6.
Dahero auch ſeyn werde, als wie EH, EN :: ▱ EK, ▱ EQ. d. 11. 5.
Letztlich iſt wiederumb das ▱ GO mit der Parallel-Fläche EM durchſchnitten. d. d. Zuß.
Darum wird ſeyn das ▱ EQ, ▱ EO :: als wie die Baſis GF,
Baſis FP. d. 25. 11.
Es iſt aber Baſis oder □ GF, FP :: EG, EP. d. 1. 6.
Deßwegen iſt auch das ▱ EQ, ▱ EO :: als wie EG, EP. d. 11. 5.
Nun iſt klar, daß dieſe 4 ▱ DL, EK, EQ, EO, ſtets zeproportionirt ſeynd, und zwar in der Verhaltnuß, welche haben die Linien DE zu EF, EH zu EN, und EG zu EP. d. 9 außleg. 5.
Dieſe Verhaltnuß iſt aber unter ſich, und auch gleich der Verhaltnuß DE zu BC bewieſen. d. d. Vorg.
Dahero ſtehet das ▱ DL zu dem ▱ EO (oder dem gleichen ▱ AB) in dreymahliger Verhaltnuß, welche ED zu BC hat. d. 10. def. 5.
Welches zu beweiſen ware.

Folge.

Wann vier ſtets zeproportionirte Linien ſeynd, daß, wie ſich die erſte zu der vierten verhaltet; alſo ſich auch das ▱, ſo auff der erſten Linie gemacht iſt, zu dem ▱, welches gleichförmig und gleich geſtölt auff der anderen Linie gemacht iſt) verhalte: Auß dieſen erhellet auch, daß die Dopplirung eines Cubus oder Würffels, allein in der Erfindung zweyer mittlern Proportional-Linien, beſtehe.



Die XXXIV. Vorgab.

Betrachtung.

Gleiche Parallelepipeden haben ihre Baſes und Höhe widerkehrlich geproportionirter; und die Parallelepipeden, welche ihre Baſes und Höhe wiederkehrlich geproportionirter haben, ſeynd einander gleich.

Es ſeynd gegeben die gleiche ▱ (verſtehe, gleiches Inhalts) ADES, GKIM, deren Baſes ſeynd AF, GN, und die Höhe AB, GL. Dieſem nach ſagt man, daß die Baſes AF, GN, und die Höhe AB, GL in einer wiederkehrlichen Proportion ſeynd, nemlich, daß ſeye Baſ. AF, Baſ. GN :: Höhe GL, Höhe AB.

Seye jetzund geſetzt, daß erſtlich die auffſtehende Seiten AB, GL bleyrecht auff denen Baſen AF, GN ſtehen.

Wann nun die zwey gleiche ▱ einerley Höhe haben: ſo iſt klar, daß ſie auch gleiche Baſes, und alsdann augenſcheinlich eine wiederkehrliche Proportion haben müſſen.

Man ſetze aber, daß das ▱ GI höher ſeye, als das ▱ AE.

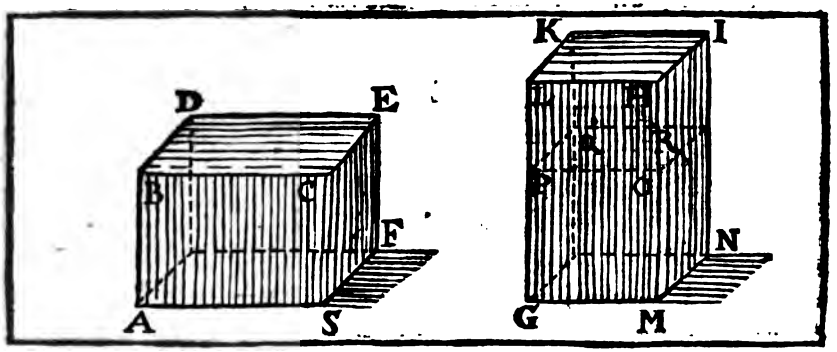
Zubereitung.

Schneide ab von der Höhe GL, die GP ⊓, der Höhe AB.

Hernach ziehe durch P die flache PQRO ═, der Baſis GN, oder LI.

Beweiß.

Weilen die ▱ AE, GR einerley Höhe haben; ſo wird ſeyn
das ▱ AE, ▱ GR :: Baſ. AF, Baſ. GN. d. 32. 11.
Es iſt aber das ▱ AE, ▱ GR :: ▱ GI, ▱ GR. d. 7. 5.
(dann die ▱ AE, und GI einander ⊓ gegeben worden ſeynd.) d. d. Vorg.
Dahero auch ſeyn werde Baſ. AF, Baſ. GN :: ▱ GI, ▱ GR.



Unterdeſſen, weilen das ▱ GI durchſchnitten iſt mit der Fläche PQRO. d.d.Zub.

So wird ſeyn, das ▱ PI, ▱ GR :: Baſ. LO Baſ. PM. d. 25. 11.
Es haltet ſich aber die Baſis LO. Baſ. PM :: LP. PG. d. 1. 6.

Deßwegen iſt auch das ▱ PI, ▱ GR :: LP, PG.
Und durch die Zuſammenſetzung, das ▱ GI (oder das gleiche ▱ AE) d. 18. 5.
▱ GR :: GL, PG (oder dergleichen Linie AB).

Dahero letztlich ſeyn werde Baſ. AF, Baſ. GN :: Höhe GL, Höhe AB.
Welches zum erſten zu beweiſen ware.

Wann nun gegeben iſt, daß die Baſes, und Höhe deren ▱ AE und GI widerkehrlich geproportionirt ſeynd, nemlich Baſ. AF, Baſ. GN :: GL, AB.

So ſagt man zum anderten, daß das ▱ AE ▭ ſeye, dem ▱ GI.
Die Zubereitung verbleibet als wie oben.

Indeme ſich verhaltet das ▱ AE, ▱ GR :: Baſ. AF. Baſ. GN. d. 32. 11.
und die Baſis AF, Baſ. GN :: Höhe GL, Höhe AB (oder die ▭ GP.) d.d.Vorg.

So wird auch ſeyn, das ▱ AE, ▱ GR :: GL. GP.
Es iſt aber GL, GP :: ▭ GH, ▭ GO. d. 1. 6.
Und als wie die Baſ. GH. Baſ. GO :: ▱ GI, ▱ GR. d. 32. 11.

Darum auch ſeyn werde das ▱ AE, ▱ GR :: ▱ GI, ▱ GR.
Und deßwegen iſt das ▱ AE ▭, dem ▱ GI. d. 9. 5.
Welches zum anderten zu beweiſen ware.

Wann letztlich gegeben wird, daß die auffſtehende AB, GL nicht bleyrecht, ſondern ſchrög auff denen Baſes ſtehen, ſo iſt der Beweiß, und die Zubereitung, wie folget: nemlich,

Man machet erſtlich auff denenſelben Baſes AF, GN, die auffgehende I, und mit denen ſchrögen ▱ in einerley Höhe.

Worauß alsdann erſcheinet, daß dieſe Schröge ▭ ſeyn, denen rechten ▱. d. 30. 11.
die rechte ▱ aber haben ihre Baſen und Höhen in widerkehrlicher Proportion. d. 34. 11.

Folget, daß auch die Schröge ▱ in widerkehrlicher Proportion ihrer Baſen und Höhen ſeynd, u. ſ. f.

Welches zu beweiſen ware.

Anmerckung.

Was geſagt und bewieſen worden iſt, in denen 29. 30. 31. 32. 33. 34. Vorgaben von denen ▭, das jene wird auch geſagt und bewieſen von denen drey-eckichten Eck-Säulen. Die Urſach iſt, weilen ſie deren ▭ gerad die Helffte ſeyn, wie es in der 28. Vorgab dieſes Buchs bewieſen iſt. Nemlich man ſagt:

I.

Die drey-eckichte Eck-Säule, welche einerley Höhe haben, verhalten ſich gegen einander, gleich wie ihre Baſes.

II.

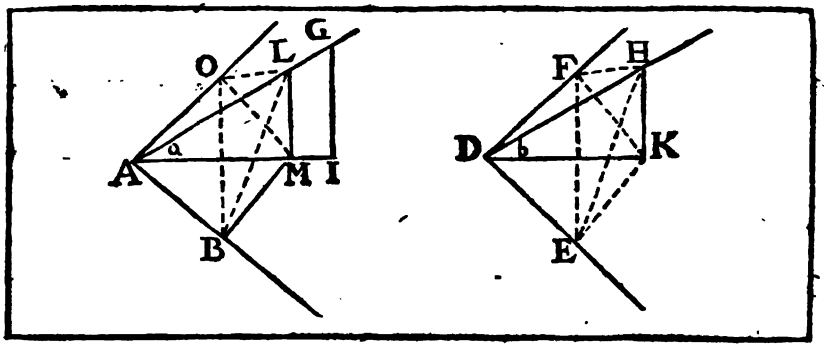
Wann ſie einerley oder gleiche Baſes haben, und in einerley Höhe ſtehen, ſo ſeynd ſolche alsdann einander gleich.

III.

Wann ſie einander gleichförmig ſeynd: ſo ſtehen ſie gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-ſagenden Seiten.

IV.

Wann ſie einander gleich ſeynd: ſo haben ſie ihre Baſes und Höhe in einer widerkehrlichen Proportion; und hinwiederum, wann ſie ihre Baſes und Höhe in widerkehrlicher Proportion haben: ſo ſeynd ſie einander gleich.



Die XXXV. Vorgab. Betrachtung.

Wann zwey flache Winckeln (BAC, EDF) einander gleich seynd, und aus ihren Spitzen (A, D) gerade Linien (AG, DH) in die Höhe gehen, welche mit denen ersten Linien beyderseits gleiche Winkeln mitmachen; (nemlich den ∠ BAG ⊓, dem ∠ EDH, und CAG ⊓, FDH) unterdessen in denen in die Höhe gehenden Linien (AG, DH) einige Puncten, (als wie G und H) nach Gefallen genommen, und auß selben auf die Fläche (BAC, EDF) (worauff anfänglich die flachen Winckeln (BAC, EDF) gesetzt seyn, bleyrechte Linien (GI, HK) herunter gelassen; und alsdann auß denen Puncten (I, K) welche von denen bleyrechten auff denen Flächen seynd gemacht worden) in die flachen Winckeln gerade Linien (IA, KD) gezogen werden: So worden sothane Linien mit denen in die Höhe stehenden (AG, DH) einander gleiche Winckeln (a und b) machen.

Zubereitung.

Mache AL ⊓, der DH. Ziehe LM ═, der GI.
Auß M mache MB bleyrecht auff AB, und MC ⊥ auff AC. d. 12. I.
Auch aus K mache KE ⊥ auff DE, und KF ⊥ auff DF.
Hange BL, LC, und EH, FH zusammen.

Beweiß.

Weilen LM ═ ist, der IG, welche auff der Fläche BAC ⊥ ist. d. d. Vorg.
so wird auch LM auff derselben Fläche BAC stehen. d. 8. II.
Dahero seynd die ∠ LMC, LMA, LMB rechte ∠. d. 3. def. II.
Und deßwegen ist das □ auff AL ⊓, dem □ auff LM, und AM. d. 47. I.
Das □ auff AM ist aber ⊓, denen □ auff AC, und CM. d. 47. I.
Darumb ist das □ auf AL ⊓ denen □ auff LM, AC, CM.
Denen □ auff LM und CM ist aber ⊓, das □ auff CL.
Folget, daß das □ auff AL auch ⊓ seye, denen □ auff AC und CL.
Dahero ist der ∠ ACL ein rechter ∠. d. 48. I.

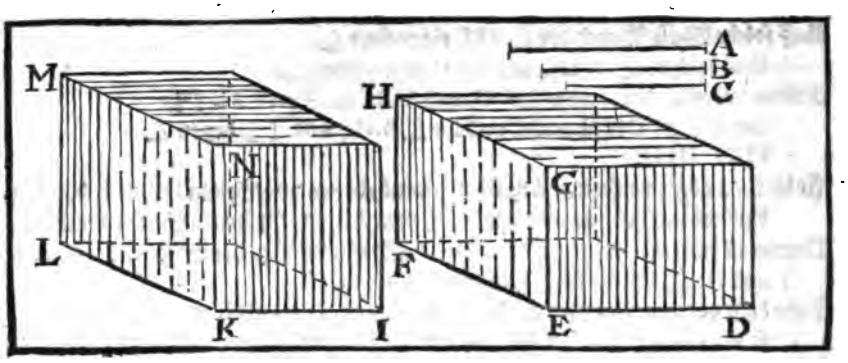
Auff ſolche Weiſe iſt auch der ∠ ABL ein rechter ∠.
Und auch die ∠ DEH, und DFH zwey rechte ∠.
Nunmehro iſt in denen zwey △ BAL und EDH die Seiten AL □, der Seiten DH gemacht, und die ∠ BAL, ABL □, denen ∠ EDH, DEH.
Folget, daß die zwo Seiten AB, BL □ ſeynd, denen zwo Seiten DE, EH. d. 26. I.
Auff ſolche Weiſe ſeynd auch die Seiten AC, CL □, denen Seiten DF, FH.
Darum iſt in denen zwey △ BAC, EDF, die Baſis BC □, der Baſis EF. d. 4. I.
und die ∠ ABC, ACB □, denen ∠ DEF, DFE.
Ziehe dieſe von denen rechten ∠ ABM, ACM, und DEK, DFK ab:
ſo werden auch die ∠ CBM, BCM und FEK, EFK einander □ ſeyn. d. 3. ax. I.
Weilen dann, in denen zween △ BCM, EFK die ∠ GBM, BCM, und FEK, EFK, und die Seiten BC und EF einander □ ſeynd: d. d. Vorg
So werden auch die Seiten BM, CM □ ſeyn, denen Seiten EK, KF. d. 26. I.
Indeme aber in denen zween △ ACM, DFK die Seiten AC, CM, und DF, FK einander □ ſeynd bewieſen worden, und die ∠ ACM, DFK zween rechte ∠ ſeynd: ſo wird darum die Baſis AM □ ſeyn der Baſis DK. d. 4. I.
Wann unterdeſſen auß denen gleichen □, welche auff denen gleichen AL, und DH ſeynd gemacht worden, die gleiche □ auff denen gleichen AM, und DK abgezogen werden.

So wird annoch verbleiben das □ auff LM □, dem □ auff HK. d. 47. I. und I. ax. I.
Und dahero iſt auch die Linie LM □, der Linie HK. d. an. 46. I.
Nunmehro ſchlieſſet man, weilen in denen zween △ ALM, DHK. die drey Seiten AM, AL, LM □ ſeynd, denen drey DK, DH, HK. Daß letztlich der ∠ a □ ſeye, dem ∠ b. d. 8. I.

Welches zu beweiſen ware.

Folget.

Wann zwey flache und einander gleiche ∠ gegeben ſeynd, und auß ihren Spitzen gerade Linien in die Höhe auffſtehen, welche mit denen anfänglich gegebenen geraden Linien beyderſeits gleiche Winckeln mit machen, daß die I einander □ ſeynd, welche von denen äuſſerſten Puncten deren auffſtehenden gleichen Linien, in dieſelbe Fläche, (worauff die flache ∠ ſtehen) ſeynd gezogen worden, nemlich LM iſt □, der HK.



Die XXXVI. Vorgab.

Betrachtung.

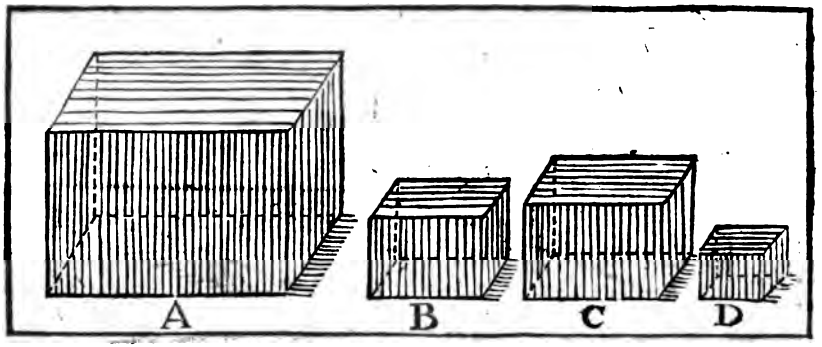
Wann drey gerade Linien geproportionirt seynd: so ist das Parallelepipedum, welches gemacht wird von diesen drey Linien, gleich dem Parallelepipedum, so auß der mittlern Linie zwar gleichseitig, gleichwincklicht aber dem ersten Parallepipedum gemacht ist.

Es seynd gegeben die drey geproportionirten Linien A, B, C, das ist, es stehet A, B :: B, C. Auß diesen seynd auff solche Art die gleichwincklichte ▱ DH, IM. gemacht worden, daß nemlich DE ⊓, A: EF ⊓, B: EG ⊓, C: und IK, KL, KN, ⊓, der mittlern B seynd. Und der dichte ∠ K ⊓, dem dichten ∠ E: Diesem nach sagt man, daß das ▱ IM ⊓ seye, dem ▱ DH.

Beweiß.

Indeme gemacht ist DE, KI :: KN. EG. — d. d. Borg.
so wird das ▭ IN ⊓ seyn, dem ▭ DG. — d. 14. 6.
Unterdessen, weilen der dichte ∠ K ⊓, dem dichten ∠ E.
Und die KL ⊓ ist gemacht worden, der EF. Wann man nun — d. d. Borg.
den dichten ∠ K auff den andern ∠ E legen solte,
So werden beyde just auff einander eintreffen, und der Punct L
wird just auff den Punct F einfallen. — d. 8. ax. I.
Dahero werden die bleyrechten Linien, welche auß denen Puncten
L und F auff dieselbe Fläche (worauff die Bases IN und DG
stehen) gezogen seynd, auch einander ⊓ seynd, und — d. 35. Cor. II.
Deßwegen beyde ▱ IM, und DH einerley Höhe haben,
Letztlich aber wegen der gleichen Bases IN und DG und der gleichen Höhe,
ist das ▱ IM ⊓, dem ▱ DH. — d. 31. II.

Welches zu beweisen ware.



Die XXXVII. Vorgab. Betrachtung.

Wann vier gerade Linien geproportionirt ſeynd: ſo werden die Parallelepipeden, welche auff ihnen gleichförmig und gleichgeſtölter beſchrieben worden, auch geproportionirt ſeyn; und hinwiederum, wann vier Parallelepipeden geproportionirt ſeynd: ſo werden auch die vier Linien, worauff ſie gleichförmig und gleichgeſtölter beſchrieben ſeynd, geproportionirt ſeyn.

Es ſeynd gegeben die vier geproportionirte gerade Linien A, B :: C, D. Darauff ſeynd vier gleichförmig und gleich geſtölte ▭ gemacht worden. Dieſem nach ſagt man, daß erſtlich ſeye das ▭ A, ▭ B :: ▭ C, ▭ D.

Beweiß.

Das A ▭ iſt zu den ▭ B in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche die Linie A zu B hat. d. 33. 11.

Alſo auch iſt das ▭ C zu dem ▭ D in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche die Linie C zu D hat.

Es iſt aber die Verhaltnuß A zu B ⊓ gegeben, der Verhaltnuß C zu D. d. d. Vorg.

Folget, daß auch die Verhaltnuß deß ▭ A, zu dem ▭ B ⊓ ſeye, der Verhaltnuß deß ▭ C, zu dem ▭ D.

Darum iſt das ▭ A, ▭ B :: ▭ C, ▭ D. d. 6. 7. def. 5.

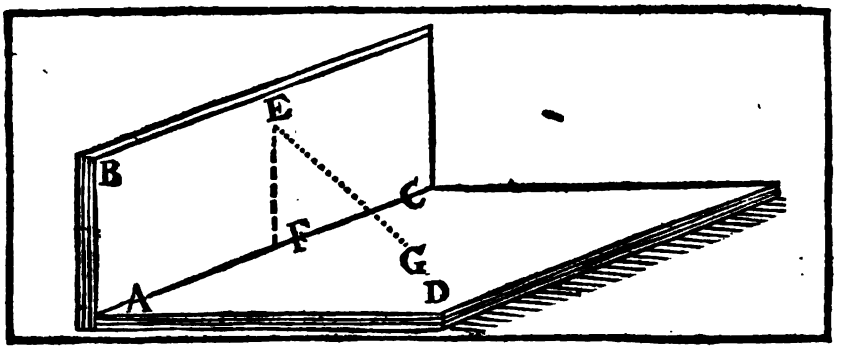
II. Wann es iſt, ▭ A, ▭ B :: ▭ C, ▭ D; ſo ſagt man, daß auch ſeye A, B :: C, D.

Dann das ▭ A zu dem ▭ B in dreymahliger Verhaltnuß iſt, der jenen, welche die Linie A zu B hat, und auch das ▭ C iſt zu den ▭ D in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche die Linie C zu D hat. d. 33. 11

Die Verhaltnuß aber deß ▭ A, zu dem ▭ B iſt ⊓ gegeben worden, der Verhaltnuß deß ▭ C, zu dem ▭ D. d. d. Vorg.

Folget, daß auch die Verhaltnuß der Linie A zu B ⊓ ſeye, der Verhaltnuß der Linie C zu D. Darum iſt es A, B :: C. D. d. 6. 7. def. 5.

Welches zu beweiſen ware.



Die XXXVIII. Vorgab.

Betrachtung.

Wann eine Fläche auff einer andern Fläche bleyrecht stehet, und man auß einem Punct, welcher auff der einen Fläche nach Gefallen genommen worden, eine bleyrechte Linie auff die andere Fläche ziehen will: so wird sothane bleyrechte Linie in den gemeinen Durchschnitt fallen.

Es ist gegeben die Fläche ABC ⊥ auff der Fläche ADC, ihr gemeiner Durchschnitt ist AC. Nun will man auß dem Punct E, welcher auff der Fläche ABC nach Gefallen ist genommen worden, eine ⊥ auff die Fläche ACD herunter ziehen. Diesem nach sagt man, daß die ⊥ nicht anderwertig, gesetzt wie in G, sondern just in den gemeinen Durchschnitt, als wie in Punct F fallen werde.

Beweiß.

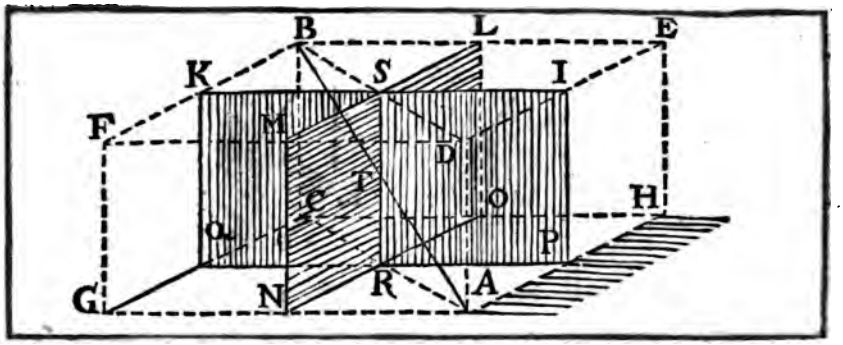
Wann man es nicht glaubet, sondern noch darbey bleibet, daß nemlich die herunter gezogene ⊥, nicht in den gemeinen Durchschnitt AC, sondern in Punct G auff der Fläche ADC, falle:

So ziehe dann auß dem Punct E, die Linie FE ⊥ auff den gemeinen Durchschnitt AC; Diese FE wird hernach auch ⊥ auff der Fläche ADC stehen. 8.4.def.11.

Worauff aber folgete, daß auff solche Weise auß dem Punct E, welcher auffserhalb der Fläche ADC ist, auff dieselbe Fläche ADC zwey ⊥ nemlich EF, und EG gezogen wären. Welches ungereimt ist: 8.13.an.11.

Dahero schliesset man, daß also nothwendig die auß dem Punct E gezogene ⊥ auff die Fläche ADC in den gemeinen Durchschnitt AC, gleich wie EF, fallen müsse, und nicht in die andere Fläche.

Welches zu beweisen ware.



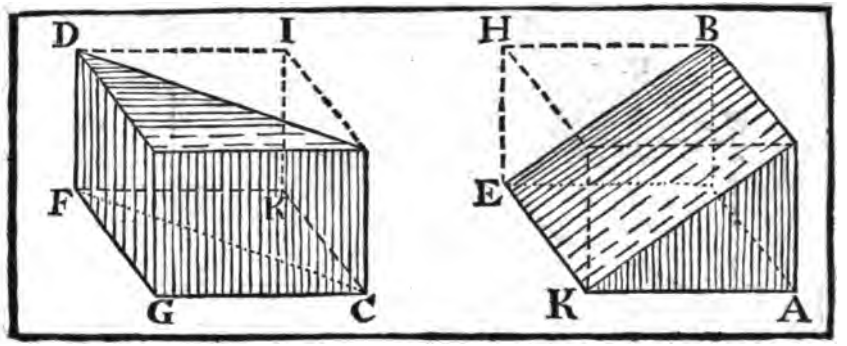
Die XXXIX. Vorgab. Betrachtung.

Wann in einem Parallelepipedum (AB) die Seiten deren gegenüberſtehenden Fläche (BE, FD: CH, GA: FB, DE: GC, AH) gleich entzwey geſchnitten, und durch ihre Puncten (KLIM, QOPN) einige Fläche gezogen werden: (nemlich KP, LN) ſo wird der gemeine Durchſchnitt (RS), und deß Parallelepipedums Diameter (BA) ſich einander gleich entzwey ſchneiden. (nemlich daß BT □ ſeye, der AT, und ST □, der RT.)

Ziehe SB, SD, RC, RA zuſammen.

Beweiß.

Die Seiten CQ, QR ſeynd □, denen Seiten AP, PR. — d. d. Zuſ. u. 34. 1.
und der ∠ CQR iſt □, dem ∠ APR (umwexlender Weiſe). — d. 29. 1.
Dahero wird auch die Baſis CR □, ſeyn der Baſis AR. — d. 4. 1.
und alſo iſt der ∠ CRQ □, dem ∠ ARP.
Unterdeſſen ſeynd die zween ∠ PRA, ARQ □, zween rechten ∠. — d. 13. 1.
Folget, daß auch die zween ∠ CRQ, ARQ □ ſeynd 2 rechten ∠. — d. 14. 1.
und darumb iſt CRA eine gerade Linie fort.
Eben auff dieſe Weiſe iſt BSD eine gerade Linie fort.
Indeme weiters AD = und □ iſt, der FG; und FG = und □, der CB. — d. 34. 1.
So wird auch AD = und □ ſeyn, der CB. — d. 9. 11. u. 1. ax. 1.
und darum iſt auch BD = und □, der AC. — d. 33. 1.
Folgends werden deßwegen die Linien BA und SR in derſelben Fläche BDAC liegen. — d. 7. 11.
Dahero, weilen in denen zween △ BTS, ATR die BS □ iſt, der AR. — d. 7. ax. 1.
und der ∠ BTS □, dem ∠ ATR, und der ∠ BST □, dem ∠ RTA. — d. 15. 1. u. 29. 1.
Wird letztlich die BT, und ST □ ſeyn, der AT, und RT. — d. 26. 1.
Welches zu beweiſen ware.



Die XL. Vorgab.

Betrachtung.

Wann zwey Eck-Säulen von einerley Höhe seint, und die eine zu der Basis ein Parallelogram hat, welches doppelt ist, der andern Basis, so ein Triangel ist: so seint beyde Eck-Säulen einander gleich.

Es seynd gegeben die zwey Eck-Säulen AB, CD von einerley Höhe. AB hat zur Basis das ▭ AE, und CD hat zur Basis den △ CGF, welcher die Helffte von dem ▭ AE ist. Diesem nach sagt man, daß die Eck-Säule AB, ⊓ seye, der Eck-Säule CD.

Erfülle vorhero die ⊟ AH, und GI.

Beweiß.

Weilen die Basis AE doppelt ist, deß △ CGF. — d. d. Vorg.
und das ▭ GK auch doppelt ist, deß △ CGF. — d. 34. I.
So wird das ▭ AE ⊓ seyn, dem ▭ GK. — d. 6. ax. I.

Und dahero wird wegen der gleichen Höhe, und gleichen Baſes,
das ⊟ AH ⊓ seyn, dem ⊟ GI. — d. 31. XI.

Die Eck-Säule AB und CD seynd aber gerad die Helffte deren
⊟ AH und GI. — d. 28. XI.

Folget, daß auch die Eck-Säule AB ⊓ seye, der Eck-Säule CD.

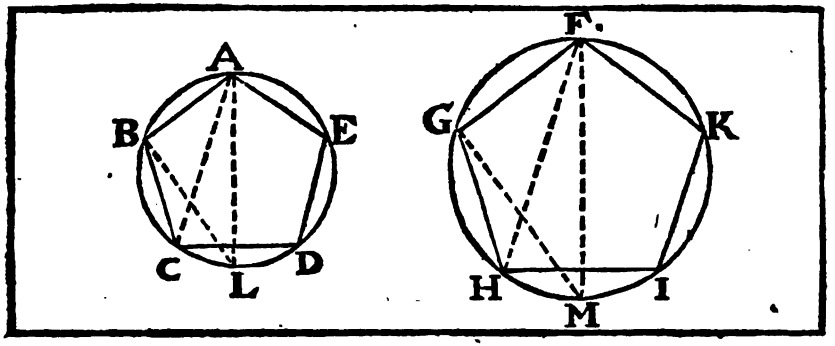
Welches zu beweisen ware.

Das

Achte Buch

Des Teutsch-redenden

Euclides.



Die I. Vorgab.

Betrachtung.

Gleichförmige in Zirckel eingeſchriebene Viel-Ecke, verhalten ſich gegen einander, gleich wie die Quadraten auff dero Diametern.

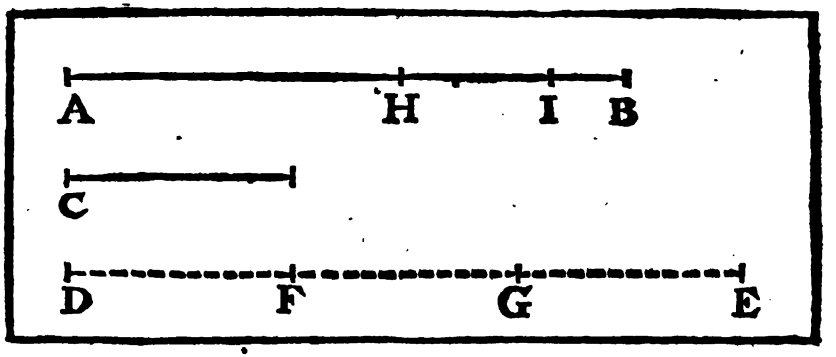
Es ſeynd gegeben die in Zirckeln eingeſchriebene gleichförmige Viel-Ecke, ABCDE, FGHIK, und deren Diametern LA, MF. Dieſem nach ſagt man, daß, gleich wie ſich verhalte das □ auff LA, zu dem □ auff MF, alſo ſeye das Viel-Eck ABCDE zu dem Viel-Eck FGHIK.

Ziehe vorhero AC, BL, und FH, GM zuſammen.

Beweiß.

Wegen der Gleichförmigkeit deren Viel-Ecke, iſt der ∠ B ⌐, dem ∠ G. d. 1. def. 6.
Und verhalten ſich die Seiten AB, BC:: FG, GH. d. 6. 6.
Deßwegen iſt der △ ABC gleichwincklicht dem △ FGH. d. 6. 6.
Nemlich der ∠ C iſt ⌐ dem ∠ H. u. ſ. f.
Unterdeſſen iſt der ∠ ALB ⌐, dem ∠ ACB, und der ∠ FMG ⌐, dem ∠ FHG (dann ſie auff gleichförmigen Schnitze AB, FG ſtehen.) d. 21. 3.
Daher iſt auch der ∠ ALB ⌐, dem ∠ FMG.
Es iſt auch der ∠ ABL ⌐, dem ∠ FGM (dann beyde im halben Zirckel ſtehen) d. 31. 3.
Folget dann, daß auch der dritte ∠ BAL ⌐ ſeye, dem dritten ∠ GFM. d. 32. 1.
Darauß ſchlieſſet man, daß, als wie ſich verhalte AL, AB:: FM, FG. d. 4. 6.
Und durch die Verwexlung AL, FM:: AB, FG. d. 16. 5.
Und deßwegen, wie ſich das □ auff AL, zu dem □ auff FM verhaltet: Alſo iſt das Viel-Eck ABCDE auff AB, zu dem Viel-Eck FGHIK auff FG. d. 22. 6.

Welches zu beweiſen ware.



Hülffe.

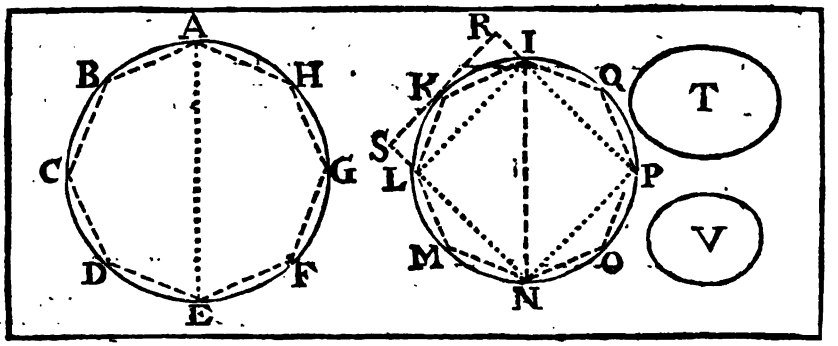
Wann zwey ungleiche Gröſſen (AB und C) ſeynd, und von der gröſſern (AB) mehr als die Helffte (nemlich AH) abgezogen wird, und von der übrigen (HB) abermahlen mehr, als die Helffte (nemlich HI) hinweg genommen wird, u. ſ. f. ſo geſchicht, daß letztlich die übergebliebene Gröſſe (IB) kleiner ſeyn werde, als die vorgegebene kleinere Gröſſe (C).

Zubereitung.

Nehme C ſo offt, biß ihre vielfache DE die Gröſſe AB übertreffe.
Seyen die Theile DF, FG, GE ein jeder inſonderheit ⌐, der C.
Unterdeſſen abziehe auß AB die AH, ſo mehr iſt als die Helffte von AB.
Aus der übrigen HB abziehe wiederumb die HI, ſo mehr iſt als die Helffte von HB, und ſo fort, biß endlich die Theile AH, HI, IB gleich an der Anzahl werden, denen Theilen DF, FG, GH.

Beweiß.

Es iſt klar, daß FE ⌐ ſeye, als die Helffte von DE.
DE iſt aber ⌐ gemacht worden, als AB.
Darumb iſt auch die Helffte von DE ⌐, als die Helffte von AB.
Deßwegen iſt FE noch viel ⌐, als die Helffte von AB
Unterdeſſen iſt HB ¬ worden, als die Helffte von AB. [d. d. Vorg. und Zub.
Folget dann, daß FE noch viel mehr ⌐ ſeye, als HB,
Und darumb dero Helffte GE auch ⌐ ſeye, als die Helffte von HB.
Es iſt aber wiederumb IB ¬ gemacht worden, als die Helffte von HB. [d. d. Vorg. und Zub.
ſo wird deßwegen auch GE noch ⌐ ſeyn, als IB.
Unterdeſſen iſt GE ⌐, der kleinern Gröſſe C. d. d. Zub.
Folget, daß auch C ⌐ ſeye, als die letzt überbliebene Gröſſe IB.
Welches zu beweiſen ware.



Die II. Vorgab. Betrachtung.

Die Zirckeln verhalten ſich gegen einander, gleich wie die Quadraten auff ihren Diametern.

Es ſeynd gegeben die zween Zirckeln ACEG. ILNP, deren Diametern ſeynd AE, IN. Dieſem nach ſagt man, daß, gleich wie ſich das □ auff AE, zu dem □ auff IN verhalte: alſo verhaltet ſich der Zirckel ACEG zu dem Zirckel ILNP.

Beweiß.

Wann man es nicht geſtehen will, ſo ſeye gemacht, daß, gleich wie ſich verhalte das □ auff AE, zu dem □ auff IN: alſo verhalte ſich der Zirckel ACEG zu einer andern Gröſſe, geſetzt, gleich wie zu T.

Nunmehro muß T entweder ⌉, oder ⌈ ſeyn, als der Zirckel ILNP. Dann gleich (ob zwar es wol wahr iſt) kan ſie allhier demſelben nicht ſeyn, auß der Urſach, daß ſonſten der Zirckel ACEG zu dem Zirckel ILNP, und zu gedachter Gröſſe T, einerley Verhaltnuß hätte, d. 7. 5.

Und ſich deßwegen der Zirckel ACEG auch zu dem Zirckel ILNP verhaltete, als wie das □ auff AE, zu dem □ auff IN. Dieſes aber wird allhier noch nicht geſtanden.

Seye dahero erſtlich geſagt, daß T ⌉ ſeye, als der Zirckel ILNP, umb die Gröſſe V.

Das iſt, der Zirckel ILNP ſeye ⌐, denen Gröſſen T + V.

Dieſem nach ſchreibe in den Zirckel ILNP, das □ ILNP ein, welches ⌐ ſeyn werde, der Helffte des umbſchriebenen □ um denſelben Zirckel ILNP. d. 9. an. 4.

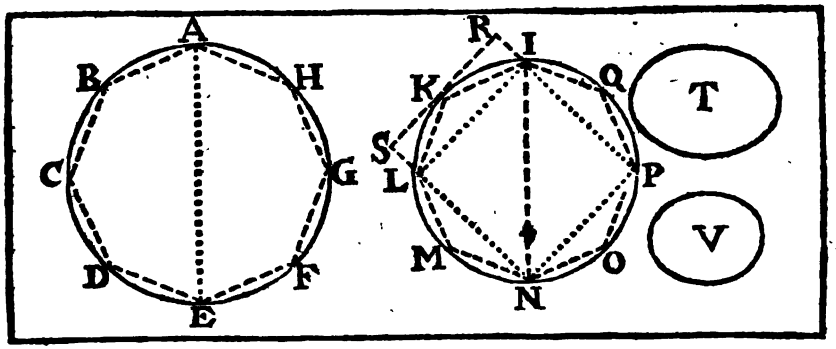
So iſt auch klar, daß das umſchriebene □ umb den Zirckel ILNP ⌈, ſeye, als derſelbe Zirckel. d. 9. ax. 1.

Und folgends auch die Helffte des umbſchriebenen □ umb den Zirckel ILNP ⌈ ſeye, als die Helffte deſſelben Zirckels.

Unterdeſſen aber iſt das □ ILNP ⌐, der Helffte des umbſchriebenen □.

Deßwegen auch das □ ILNP ⌈ iſt, als die Helffte deß Zirckels ILNP.

Nunmehro zertheile die Umbkreiß-Stücke IL, LN, NP, PI
geradt entzwey in denen Puncten K, M, O, Q.
Hange zuſammen IK, KL, LM, MN, NO, OP, PQ, QI.
Durch K ziehe die anrührende SR, welche mit LI ═
lauffe, und mit denen verlängerten NL, PI zuſammen
komme, und das □ LR geſtalte. d. 17. 3. u. 31. 1.
Dieſem nach erſcheinet, daß das □ LR ⌐ ſeye, als der Zirckel-
Schnitz LKI. d. 9. ax. 1.
Und alſo auch die Helffte deß □ LR ⌐ ſeye, als die Helffte
deſſelben Zirckel-Schnitzes.
Unterdeſſen aber iſt der △ IKL ⌐, der Helffte deß □ LI. d. 41. 1.
Folget, daß auch der △ IKL ⌐ ſeye, als die Helffte deſſelben
Zirckel-Schnitzes LKI.
Auff dieſe Weiſe werden auch die übrigen △ ⌐ ſeyn, als die
Helffte deren Schnitze, in welchen ſie ſeynd.
Und alſo ſeynd alle △ ſammentlich ⌐, als die Helffte aller
Schnitze ſammentlich.
Solte man noch weiter fort die Umbkreiß-Stücke LK, KI, u. ſ. f.
gleich entzwey zu ſchneiden, und mit geraden Linien zuſammen zu
hangen, ſich bemühen.
So würde, gleich wie vorgehends, bewieſen, daß die darauß entſproßne
△ ſammentlich ⌐ wären, als die Helffte deren Zirckel-Schnitze
ſammentlich, in welchen ſie ſeynd, u. ſ. f.
Wenn nun von dem Zirckel ILNP mehr, als die Helffte,
nemlich das □ ILNP abgezogen, und auch von denen übrigen
Zirckelſchnitze mehr als die Helffte, nemlich die △ IKL, LMN. u. ſ. f.
hinweg genommen werden. Und ſtets ſo fort eines von dem an-
dern abgezogen wird.
So werden endlich einige Zirckel Schnitze überbeiben, welche ſam-
mentlich ⌉ ſeyn werden, als die Gröſſe V, ſo der Unterſcheid zwiſchen dem Zirckel ILNP, und der Gröſſe T iſt d. Vor. Lem.
Setze man, daß die überbliebenen Zirckel-Schnitze IK, KL, LMt u. ſ. f. ſeint,
welche ſammentlich ⌉ ſeint, als V.
Dieſem nach, weilen der Zirckel ILNP ⌐ iſt, der T + V,
Und man auß gedachtem Zirckel die überbliebene Schnitze,
und auß T + V die Gröſſe V (welche ſchon ⌐ bewieſen worden
iſt, als die überbliebene Schnitze ſammentlich) ordentlich abziehet.
So folget klar, daß auch das übrige Viel-Eck IKLMNOPQ ⌐,
verbleibe, als die übrige Gröſſe T.
Unterdeſſen einſchreibe in den Zirckel ACEG das Viel-Eck ABCD
EFGH, welches gleichförmig ſeye dem Viel-Eck IKLMNOPQ. d. 18. 6.
Nun iſt gewiß, daß ſich das Viel-Eck ABCD, zu dem Viel-Eck IKLM,
verhalte, als wie das □ auff AE, zu dem □ auff IN. d. 1. 12.
Es iſt aber geſagt worden, daß ſich verhalte das □ auff AE zu dem
□ auff IN, als wie der Zirckel AECG, zu der Gröſſe T.
Dahero ſich verhalten werde das Viel-Eck ABCD, zu dem Viel-Eck
IKLM, als wie der Zirckel ACEG, zu der Gröſſe T.
Entzwiſchen iſt das Viel Eck ABCD ⌉, als der Zirckel ACEG. d. 9. ax. 1.



Folget dann letztlich, daß auch das Viel-Eck IKLM ⌝ seye, als T. d. 14. f.
Dieses aber ist erst vorgehends ⌜ bewiesen worden, als dieselbe T.

Dahero ist es ungereimt, und kan deßwegen die Grösse T
nicht ⌝ seyn, als der Zirckel ILNP. ∞.

Mercke, wann man den kleinern Zirckel ILNP zu dem gröſſern Zirckel
ABEG halten und vergleichen wolte, daß eben auff diese Art solte
bewiesen werden, daß unmöglich wäre, daß der kleinere Zirckel sich zu
einer Grösse, welcher kleiner wäre, als der gröſſere Zirckel, also ver-
halten könte, als wie das □ auff IN deß kleinern Zirckels, zu dem
□ auff AE deß gröſſern Zirckels: dahero haubtsächlich erhellet,
daß niemahlen ein □ auff dem Diameter eines Zirckels, zu den
andern □ auff dem Diameter eines andern Zirckels, dieselbe Ver-
haltnuß habe, welche der erstere Zirckel, zu der Grösse, (welche
kleiner als der letztere Zirckel ist) habe. Es seye hernach der erste
Zirckel ⌜, oder ⌝, als der letztere.

Seye zum andern mahl gesagt, daß die Grösse T ⌜ seye,
als der Zirckel ILNP.

Indeme schon vorhero gesagt worden ist, daß sich der Zirckel ACEG also
zu der Grösse T verhalte, gleich wie das □ auff AE, zu dem □
auff IN.

So wird sich auch durch die Umbkehrung T zu dem Zirckel ACEG
verhalten: als wie das □ auff IN, zu dem □ auff AE.

Unterdessen setze man, daß, wie sich T zu dem Zirckel ACEG verhalte,
also sich auch der Zirckel ILNP zu einer andern Grösse, gleich wie
zu der Grösse V, verhalte.

Weilen aber T ⌜ zu seyn gesagt wird, als der Zirckel ILNP:
so wird auch der Zirckel ACEG ⌜ seyn, als V. d. 14. f.

Dahero sich verhalten werde das □ auff IN zu dem □ auff AE
:: der Zirckel ILNP, zu V, so doch ⌝ bewiesen worden ist, als der
Zirckel ACEG. Dahero ist es auch ungereimt, und schon im Vor-
gehenden bewiesen worden, daß nicht seyn könne, daß das □ auff
dem Diameter IN, zu dem □ auff dem andern Diameter AE
dieselbe Verhaltnuß habe, welche der erste Zirckel ILNP zu der

Gröſſe V (welche kleiner, als der letztere Zirckel ACEG iſt) habe; es ſeye gleichwol der erſte Zirckel ⌜, oder ⌝, als der letztere.

Mercke, daß, wann man den kleinern Zirckel ILNP zu dem gröſſern Zirckel ACEG halten, und vergleichen wolte, eben auff dieſe Art ſolte bewieſen werden: daß unmöglich wäre, daß das □ auff IN, zu dem □ auff AE dieſelbe Verhaltnuß haben ſolte, welche der kleinere Zirckel ILNP zu der Gröſſe V (welche kleiner iſt, als der andere Zirckel (ACEG) hat.

Auß dieſem ſchlieſſet man, daß alſo T auch nicht ⌜ ſeye, als der Zirckel ILNP, und dahero nothwendig demſelben Zirckel ILNP ⌝ ſeyn müſſe.

Und deßwegen, maſſen geſagt iſt, daß ſich verhalte das □ auff AE zu dem □ auff IN, als wie der Zirckel ACEG, zu der Gröſſe T.

Jetzund aber der Zirckel ACEG ſich zu der Gröſſe T verhalte, als wie derſelbe Zirckel ACEG, zu dem Zirckel ILNP. 9.7.5.
(denn T ⌝ bewieſen worden iſt dem Zirckel ILNP)

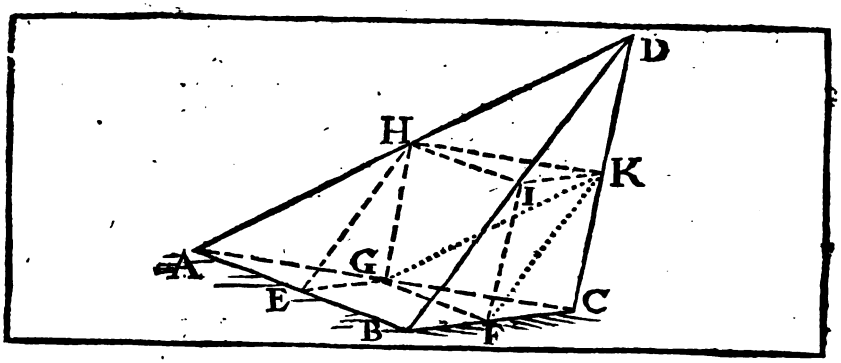
Folget letzlich, daß es ſeye, gleichwie ſich verhalte das □ auff AE zu dem □ auff IN:: der Zirckel ACEG, zu dem Zirckel ILNP.

Welches zu beweiſen ware.

Folge.

1. Daß ſich ein Zirckel zu dem andern verhalte, als wie das in dem erſten eingeſchriebene Viel-Eck, zu den, in den andern Zirckel gleichförmig eingeſchriebenen, Viel-Ecken.

2. Die Zirckeln verhalten ſich gegen einander in zweymahliger Verhaltnuß ihrer Diametern.



Die III. Vorgab. Betrachtung.

Eine jede Spitz-Säule, ſo eine dreyeckigte Baſis hat, wird in zwey Eck-Säule abgetheilt, welche einander gleich, und zuſammen genommen gröſſer, als die Helffte der gantzen Spitz-Säule ſeint; hernach in zwey Spitz-Säulen, welche einander gleich, und der gantzen, und unter ſich gleichförmig ſeynd.

Es iſt gegeben die Spitz-Säule DABC, welche die dreyeckichte Baſis ABC hat.
Dieſem nach ſagt man: I. Daß in ſolcher zwey Eck-Säulen, gleich wie EBFGHI und CFGHIK, welche einander gleich ſeynd, ſich befinden.
Zertheile dahero alle Seiten der Spitz-Säule gerad entzwey in denen Puncten E, F, G, H, I, K, und hange zuſammen HK, HI, IK, HE, IF, GF.

Beweiß.

Weilen in dem △ BDC die Seiten DC, DB gleich entzwey ſeynd getheilt worden, und dahero einander proportionirlich:
So wird ſeyn DK, KC :: DI, IB,
Und deßwegen iſt IK ═, der BC. d. 2. 6.
Auff ſolche Weiſe iſt auch IF ═, der KC.
und darumb iſt FIKC ein □. d. 35. def. 1.
Eben alſo beweiſet man, daß CGHK, und HIFG □ ſeynd;
Item, daß auch BFGE und EHIB □ ſeint.
Indeme aber IK und KH ═ ſeint, denen FC und CG,
ſo werden auch die Flächen HIK und GFC (ſo durch dieſelbe ſeynd gezogen worden) einander ═ ſeyn. d. 15. 11.
Und deßwegen iſt CFGHIK eine Eck-Säule. d. 13. def. 11.
Eben auff dieſe Art kan man beweiſen, daß EBFGHI eine Eck-Säule ſeye.
Unterdeſſen, weilen dieſe zwo Eck-Säulen einerley Höhe haben, und das □ BFGE, ſo die Baſis der Eck-Säule EBFGHI iſt, doppelt, oder noch einmahlen ſo groß iſt, als der △ GFC, welcher die Baſis der Eck-Säule CFGHIK iſt. d. 41. 1.
So wird dahero die Eck-Säule EBFGHI ⊓ ſeyn, der Eck-Säule CFGHIK. d. 40. 11.

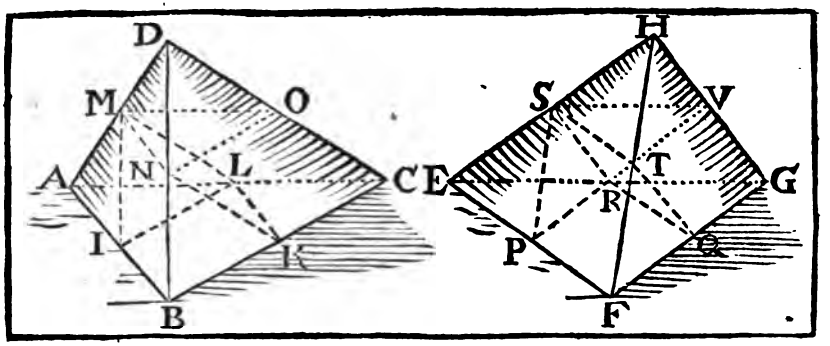
Welches zum erſten zu beweiſen ware.

II. Sagt man, daß in der Eck-Säule DABC, zwey Spitz-Säulen, als wie AHEG und DHIK.
Welche einander gleich seynd, sich befinden.
Dann es ist klar, daß wegen deren ▭ und Bereitung der △ DKI ⌐ seye, d. 8. L. dem △ IFB.
Und aus den vorgehenden hat man auch ersehen, daß der △ IFB ⌐ seye, dem gegen über stehenden △ HGE.
Dahero ist der △ DKI ⌐, dem △ HGE.
So ist ferner handgreifflich wahr, daß wegen der gleich-entzweygetheilten Seite, und ▭, der △ DHI ⌐ seye, dem △ HAE. und der △ DKH ⌐, dem △ HGA, und der △ HIK ⌐, dem △ AEG.
Dahero ist auch die Spitz-Säule HAEG ⌐, und gleichförmig der Spitz-Säule DHIK. d. 10. def. 11.
Welches zum andern zu beweisen ware.

III. Sagt man, daß solche zwey Spitz-Säulen gleichförmig der gantzen DBAC seynt.
Dann die Linie KI ist = der Linie BC,
und deßwegen ist der △ IDK gleichförmig, dem △ BDC. d. 4. Cor. 2. 6.
Auff solche Weise werden auch die übrigen △ in denen zwey kleinen Spitz-Säulen gleichförmig seyn, denen übrigen △ der gantzen Spitz-Säule DABC. Welches zum dritten zu beweisen ware.

IV. Sagt man, daß die zwey Eck-Säulen EBFGHI und CFGHIK zusammen genommen ⌐ seint, als die Helffte der gantzen Spitz-Säule.
Ziehe vorhero zusammen GK, FK, worauß entstehen die zwey Spitz-Säulen KGFC, und DHIK, so einander gleich seint. d. 28. 11.
Dann erstlich ist der △ GFC ⌐, dem △ HIK bewiesen. d. d. Vor.
Hernach, weilen die Linie FI =, und ⌐ ist, der Linie KD. d. 2. 6. und 33. L.
Und auch die Linie FK = und ⌐ ist, der Linie ID.
Letztlich auch GK = und ⌐ ist, der Linie HD.
So seynd darumb die △ FCK, IKD und GCK, HKD und GFK, HID einander gleich. d. 8. 1.
Und folgends die Spitz-Säule KCFG auch ⌐, der Spitz-Säule DKIH. d. 10. def. L.
Die Eck-Säule CFGHIK ist aber ⌐, als die Spitz-Säule ECFG.
(nemlich das gantze ist ⌐, als sein Theil).
Dahero auch die Eck-Säule CFGHIK ⌐ ist, als die Spitz-Säule DKIH.
Unterdessen ist der Eck-Säule CFGHIK ⌐, die Eck-Säule EBFGHI. d. d. Vorg.
Und der Spitz-Säule DKIH ist ⌐, die Spitz-Säule HAEG.
Deßwegen ist die Eck-Säule EBFGHI auch ⌐, als die Spitz-Säule HAEG. und folgends seynd beyde Eck-Säule sammentlich ⌐, als die beyde Spitz-Säulen sämmtlich. d. 4. ax. L.
Und darumb seint auch beyde Eck-säulen sammentlich ⌐, als die Helffte der gantzen Spitzsäule DBAC (Dann es ist klar, wann ein gantzes in zwey ungleiche Theile abgetheilet wird, daß der grössere Theil, grösser als die Helffte, der kleinere aber, kleiner als die Helffte seye.)

Welches zu beweisen ware.



Die IV. Vorgab. Betrachtung.

Wann zwey Spitz-Säulen, welche einerley Höhe, auch eine dreyeckichte Basis haben, und eine jede in zwey gleiche Spitzsäulen, so auch gleichförmig der gantzen seynd, und in zwey gleiche Ecksäulen abgetheilt seynd, und diese Spitzsäulen, gleich wie vorgehends wiederumb auff solche Weise abgetheilt werden, u. s. f. So wird seyn, als wie sich eine Basis der einen, zu der Basis der andern, Spitzsäule verhaltet, also werden sich alle Ecksäulen in der einen, zu allen Ecksäulen in der andern Spitzsäule, verhalten

Es seynd gegeben die zwey Spitzsäulen DABC, HEFG, welche einerley Höhe und die Basis dreyeckicht haben; diese seynd abgetheilt, wie es in der vorgehenden Vorgab geschehen ist, in zwey gleiche Ecksäulen MIBNKL, KNMOCL und SPFRQT, QTSRGV, und in zwey gleiche, und der gantzen gleichförmigen Spitzsäulen MAIL, MDNO und SEPR, SHTV. Und diese Spitzsäulen seynd abermahlen nach solcher Art abgetheilet worden, u. s. f. so lang man wil, doch mit diesem Geding, daß beyderseits gleiche Anzahl deren Abtheilungen gehalten werden. Diesem nach sagt man, daß wie sich die Basis ABC, zu der Basis EFG verhaltet: also werden alle Ecksäulen in der Spitzsäule DABC, zu allen Ecksäulen in der Spitzsäule HEFG sich halten.

Beweiß.

Erstlich ist klar, weilen die Spitzsäule DABC, HEFG.
einerley Höhe haben, und die Ecksäulen welche in der ersten Abtheilung entstanden seynd, just in der Helffte derselben Höhe seynd gemacht worden

Daß auß dieser Ursach gedachte Ecksäulen auch einerley Höhe haben.

Alsdann wird sich wegen gleicher Abtheilung beyderseits verhalten
BC, KC:: EG, QG. d. 15. 5.

Deßwegen ist der △ ABC, △ LKC:: △ EFG, △ RQG. d. 22. 6.
(dann der △ LKC so wol gleichförmig ist dem △ ABC, als der △ RQG, dem △ EFG). d. 4. Cor. 26.

Und durch die Verwexlung der △ ABC, △ EFG:: △ LKC, △ RQG. d. 16. 5.

Hernach, als wie die Baſis LKC zu der Baſis RQG :: die Eckſäule KNMLCO, zu der Eckſäule QTSRGV d.34.an.11.

Und auch als wie die Eckſäule KNMLCO, zu der Eckſäule QTSRGV :: die Eckſäule MIBNLK, zu der Eckſäule SPFTRQ. d.7.5.
(Dann ſie haben einerley Höhe, und ſeynd einander gleich)

Dahero letztlich ſeyn werde, wie die Baſis ABC zu der Baſis EFG :: die Eckſäule KNMLCO + MIBNLK, zu denen Eckſäulen KTSRGV + SPFTRQ.

Waun ferners die Spitzſäule MDNO, MAIL und SHTV. SEPR auff gedachte Art abgetheilt werden,

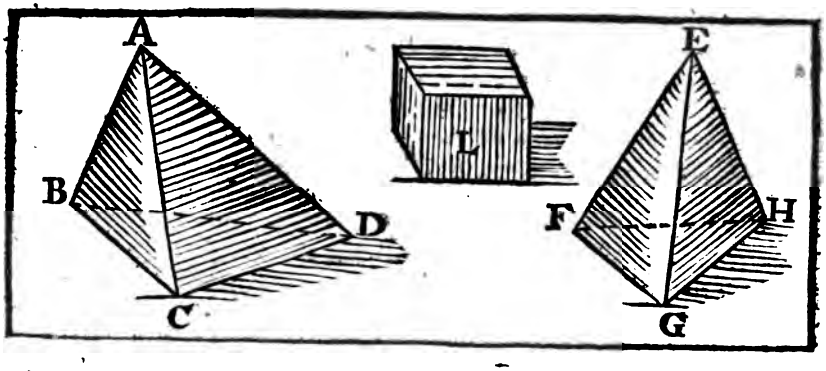
So werden die vier neu darauß entſtandene Eckſäulen der einen, ſich zu denen vier neu darauß entſtandenen Eckſäulen der andern Spitzſäule verhalten; als wie die Baſis MNO, und AIL, zu denen Baſes STV und EPR. d.d.Vorg.

Durch die vorgehende Vorgab aber iſt bewieſen worden, daß die Baſis MNO und AIL eine jede inſonderheit ⊓ iſt, der Baſis LKC, und eben die Baſis STV und EPR, eine jede inſonderheit ⊓, der Baſis RQG.

Unterdeſſen verhältet ſich auch der △ LKC, △ ABC: : △ RGQ, △ EFG. d.2.6.
und durch die Verwexlung iſt der △ LKC, △ RGQ :: △ ABC. △ EFG.

Dahero alle Eckſäulen in der Spitzſäule DABC ſich alſo verhalten werden / zu allen Eckſäulen in der Spitzſäule HEFG: gleich wie d.12.5.
Die Baſis ABC ſich zu der Baſis EFG haltet.

Welches zu bewriſen wäre.



Die V. Vorgab. Betrachtung.

Die Spitz-Säulen, so einerley Höhe, und dreyeckichte Baſes haben, haben sich gegen einander, als wie ihre Baſes.

Es seynd gegeben die Spitzsäulen ABCD, EFGH, so einerley Höhe, und die Baſes BCD, FGH dreyeckicht haben. Diesem nach sagt man, daß seye als wie BCD, FGH :: ABCD, EFGH.

Beweiß.

Solte es nicht also seyn, so seye, daß eine Spitzsäule, nemlich ABCD, eine grössere Verhaltnuß habe zu der andern EFGH, als die eine Baſis BCD, zu der andern Baſis FGH.

Nehme demnach die Grösse L auff solche Weise, daß sie kleiner, als die Spitzsäule ABCD seye, und zu der Spitzsäule EFGH die selbe Verhaltnuß habe, welche die Baſis BCD, zu der Baſis FGH hat. Nemlich daß seye Baſ. BCD. Baſ. FGH :: L. Spitz. EFGH.

Hernach zertheile die Spitzsäule ABCD, gleich wie es in der dritten Vorgab geschehen, in zwey gleiche Eck- und Spitzsäulen, und diese zertheile wiederumb auff solche Weise, und also weiter fort, so viel man es nöthig hat. Diesem nach,

Weilen nun die erste zwey Eckſäulen mehr als die Helffte der Spitzsäule ABCD seint, und abermahlen die vier neue und kleinere Eckſäulen auch mehr, als die Helffte deren ersten zwey kleinen Spitzsäulen, seint u. s. f. 8. 3. 12.

So ist klar, daß so viel Eckſäulen in der Spitzsäule ABCD mögen gestaltet werden, welche zusammen genommen, letztlich Γ seye können, als die Grösse L, welche kleiner ist genommen worden, als die Spitzsäule ABCD.

Mache unterdessen auch eine solche Eintheilung der kleinern Eckſäule in die Spitzsäule EFGH, welche in gleicher Anzahl mit den ersten seint.

Diesem nach, weilen sich alle Eckſäulen in der Spitzsäule ABCD also verhalten zu allen Eckſäulen in der Spitzsäule EFGH, als wie die Baſis BCD, zu der Baſis FGH. 8. 4. 12.

Und aber genommen iſt, daß ſich die Gröſſe L zu der Spitzſäule EFGH eben alſo verhalte, als wie die Baſis BCD zu der Baſis FGH.

Darum ſich auch verhalten werden alle Eckſäulen in ABCD zu allen Eckſäulen in EFGH: als wie die Gröſſe L, zu der Spitzſäule EFGH.

Unterdeſſen ſeynd die Eckſäulen in ABCD ſammentlich Γ angenommen worden, als L. d.d.Vorg.

Deßwegen auch die Eckſäulen in EFGH Γ ſeyn müſſen, als die Spitzſäule EFGH, welches aber ungereimt iſt, (daß nemlich ein Theil Γ ſeyn ſolte, als ſein gantzes). d. 14.5.

Dahero ſchlieſſet man, daß keine andere Gröſſe, als wie L, ſo kleiner iſt als die Spitzſäule ABCD, dieſelbe Verhaltnuß habe zu der Spitzſäule EFGH, welche die Baſis BCD, zu der Baſis FGH hat.

Und darumb hat keine unter dieſen Spitzſäulen eine zu der andern eine gröſſere Verhaltnuß, als eine Baſis zu der andern hat.

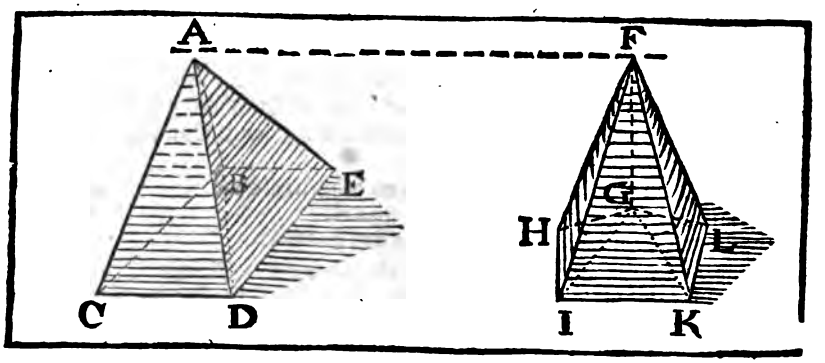
Sondern es muß nothwendig ſich verhalten, als wie BCD, FGH :: ABCD, EFGH.

Welches zu beweiſen ware.

Folge.

Die Spitzſäule, ſo einerley Höhe, und gleiche dreyeckigte Baſes haben, ſeynd einander gleich.

Und hinwiederumb haben gleiche Spitzſäulen, welche gleiche und dreyeckichte Baſes haben, einerley Höhe.



Die VI. Vorgab. Betrachtung.

Allerhand Spitz-Säulen, welche gleiche Höhe haben, halten ſich gegen einander, als wie ihre Baſes.

Es ſeynd gegeben die Spitzſäulen ABCDE, FGHIKL, welche einerley Höhe haben. Dieſem nach ſaget man, daß ſeye: wie ſich die Baſis BCDE zu der Baſis GHIKL verhalte: alſo verhalte ſich auch die Spitzſäule ABCDE, zu der Spitzſäule FGHIKL.

Ziehe vorhero auß einem ∠ in denen Baſen, als wie auß B und G in die übrige ∠ ſo viel gerade Linien, als du kanſt, dardurch werden die Baſes in lauter △ abgetheilt, auff welchen hernach ſo viel kleine Spitz-Säulen darauff zu ſtehen dir einbilde. Dieſem nach

Beweiß.

Weilen die zwey kleine Spitzſ. ABCD und FGHI gleiche Höhe, und die Baſes BCD, GHI dreyeckicht haben. d. d. Zuß.

So wird ſeyn, als wie Baſis GHI, Baſis BCD :: Spitzſ FGHI Sp. ABCD. d. ſ. 12.

und auch als wie Baſis GIK, Baſis BCD :: Spitzſ. FGIK, Spitzſ. ABCD d. ſ. 12.

Und als wie Baſ GHI + GIK, Baſ. BCD :: Spitzſ. FGHI + FGIK. Spitzſ. ABCD. d. 4. ſ.

Ferner iſt wie die Baſ. GKL. Baſ. BCD :: Spitzſ. FGKL. Spitzſ. ABCD: d. ſ. 12.

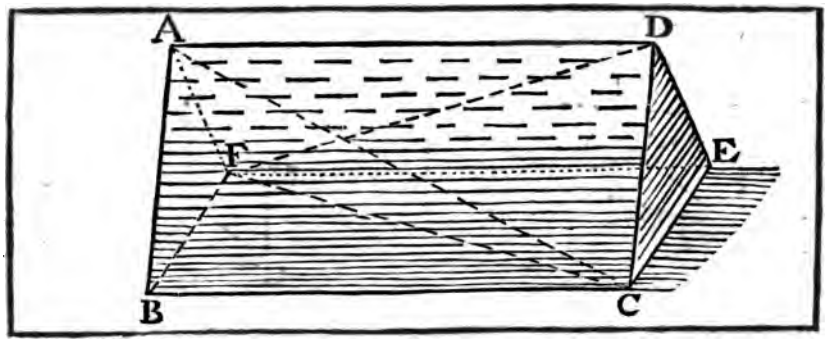
Dahero letztlich ſeyn werde, als wie Baſ. GHI + GIK + GKL (oder mit einem Wort Baſ. GHIKL) ſich haltet zu der Baſis BCD :: iſt die Spitzſ. FGHI + FGIK + FGKL (oder mit einem Wort, Spitzſ. FGHIKL) zu der Spitzſ. ABCD. d. 24. ſ.

Und durch die Umbkehrung Baſ. BCD, Baſ. GHIKL :: Spitzſ. ABCD. Spitzſ. EGHIKL. d. 24. ſ.

Auff ſolche Weiſe wird auch bewieſen, daß wie ſich Baſis BDE zur Baſ. GHIKL verhalte: ſo ſeye auch die Spitzſ. ABDE, zu der Spitzſ. FGHIKL. d. 4. ſ.

Deßwegen ſchlieſſet man, daß auch ſeye, wie Baſ. BCD + BDE (das iſt die Baſis BCDE allein) ſich zu der Baſ. GHIKL verhalte :: ſeye die Spitzſ. ABCD + ABDE (das iſt die Spitzſ. ABCDE allein) zu der Spitzſ. FGHIKL. d. 24. ſ.

Welches zu beweiſen ware.



Die VII. Vorgab.

Betrachtung.

Eine jede Eckſäule, ſo eine dreyeckichte Baſis hat, wird in drey Spitzſäulen abgetheilt, welche einander gleich ſeynd, und dreyeckichte Baſes haben.

Es iſt gegeben die Eckſäule ABCDEF, welche zur Baſis, und gegen über ſtehenden Fläche, die gleiche und gleichförmige △ CDE und BAF hat. Dieſem nach ſagt man, daß dieſe Eckſäule in drey dreyeckichte Spitzſäulen, als wie in FACB, FADC, CDFE, welche einander gleich ſeint, abgetheilt werde.

Ziehe vorhero in denen drey ▭ die Diametern FC, AC, FD.

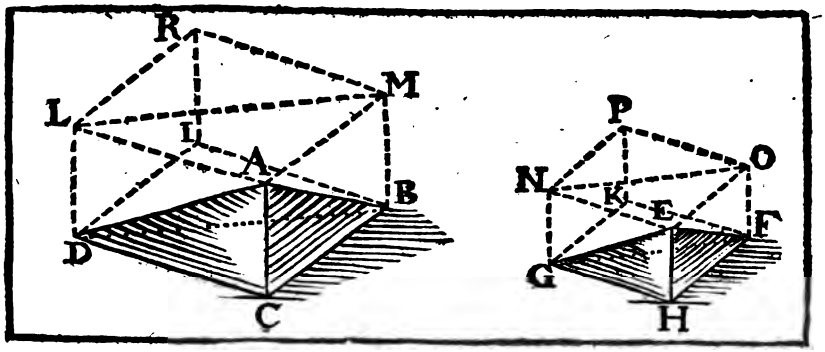
Beweiß.

Der △ ACB iſt ⊓, dem △ ADC. d. 34. 1.
So haben auch die zwey Spitzſäulen FACB, FADC einerley Höhe.
Dahero iſt die Spitz. FACB ⊓, der Spitz. FADC. d. 5. 12.
Abermahlen iſt der △ FAD ⊓, dem △ FDE, d. 34. 1.
und die zwo Spitzſäulen CDAF (oder ſo ein Ding FADC) und CDFE haben auch einerley Höhe.
Dahero iſt auch die Spitz. FADC ⊓, der Spitz. CDFE d. 5. 12.
und folgends ſeynd alle drey Spitzſäulen FACB, FADC und CDFE (in welche die Eckſäule ABCDEF iſt abgetheilt worden) einander gleich. d. 1. ax. 1.

Welches zu beweiſen ware.

Folge.

Eine jede Spitzſäule iſt grad der dritte Theil der Eckſäule, welche mit derſelben einerley Baſis und Höhe hat, oder
Eine jede Eckſäule iſt dreyfach der Spitzſäule, welche mit derſelben einerley Baſis und Höhe hat.



Die VIII. Vorgab. Betrachtung.

Gleichförmige Spitz-Säulen, welche dreyeckichte Baſes haben, halten ſich gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-ſagenden Seiten.

Es ſeynd gegeben die zwey dreyeckichte Spitzſäulen ABCD, EFGH, welche ihre Baſes BCD, FHG gleichförmig haben, und auch die übrige △, gleichförmig denen übrigen △. Dieſem nach ſagt man, daß eine Spitzſäule zu der andern in dreymahliger Verhaltnuß ſeye, derjenen, welche eine gleichförmig-haltnuß-ſagende Seiten, geſetzt AB, zu der andern EF hat.

Zubereitung.

Erſtrecke die Fläche deren △ ACB, DCB, ACD, und ausfülle die □ CM, CI, CL.

Hernach ziehe LR, RM ═, denen AM, AL biß ſie zuſammen ſtoſſen.

Hange RI zuſammen.

So wird darauß das ⌲ CR entſtehen, welches mit der Spitzſäulen ABCD einerley Höhe hat. d. 15. 11.

Auff ſolche Weiſe verfertige auch das ⌲ HP.

Letztlich ziehe LM, NO zuſammen.

Beweiß.

Dieweilen die Spitzſäulen einander gleichförmig ſeint, ſo werden alle △, ein jeder dem ſeinen, in beyden Spitzſäulen einander gleichförmig ſeyn. d. d. Vorg. d. 9 def. 11.

Und ſich zu einem Exempel verhaltenn AC, CB: : EH, HF. d. 1. def. 6.

Und der ∠ ACB wird auch ⊓ ſeyn dem ∠ EHF. d. 5. 6.

Dahero ſeynd auch die □ CM, HO einander gleichförmig: d. 15. 11. und 41. 1.

Auff dieſe Art werden einander gleichförmig ſeyn die □ CL, HN und CI, HK, und auch ihre gegen über ſtehende □. d. 24. 11.

Darauff folget, daß auch die ⌲ CR, und HP einander gleichförmig ſeint. d. 9. def. 11.

Und deßwegen verhalten ſich dieſe zwey ▱ gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-ſagenden Seite CB und HF. d. 33. 11.

Die Spitzſäulen ABCD, EFGH ſeynd unterdeſſen gerad ein ſechſter Theil von ihren ▱.
(dann die zwey Eckſäulen LMBCAD und NOFEHG ſeyn gerad die Helffte deren ▱ CR und HP. d. 28. 11.
Und die zwey Spitzſäulen ABCD und EFGH ſeynd gerad der dritte Theil von denen zwey Eckſäulen LMBCAD und NOFEHG) d. 7. 12.

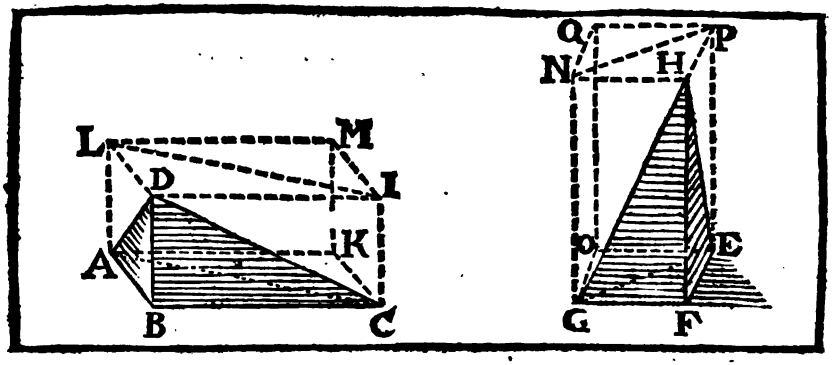
Dahero halten ſich auch die zwey Spitzſäulen ABCD, EFGH gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß, derjenen, welche die gleichförmig-haltnuß-ſagende Seiten CB, zu der andern Seiten HF hat.

Welches zu beweiſen ware.

Folge.

Auch die gleichförmige Spitzſäulen, welche mehr, als drey Seiten zur Baſis haben, ſtehen gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-ſagenden Seiten.

Die Urſach iſt, weilen ſolche in dreyeckichte Spitzſäule können abgetheilt werden, welche verſchiedener einander gleichförmig ſeint; und in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-ſagenden Seiten gegen einander ſich verhalten, und dahero auch zuſammengeſetzter ſich gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-ſagenden Seiten verhalten werden.



Die IX. Vorgab. Betrachtung.

Die gleichen Spitz-Säulen von dreyeckigten Basen, haben ihre Bases und Höhe wiederkehrlich geproportionirter; und hinwiederumb die Spitz-Säule, von dreyeckichten Bases, welche ihre Bases und Höhe widerkehrlich geproportionirter haben, seynd einander gleich.

Es seynd gegeben die gleiche, und auff dreyeckichten Bases stehende Spitzsäulen DABC, HEFG. Diesem nach sagt man I. daß sie ihre Bases ABC, EEG, und die Höhe wiederkehrlich geproportionirter haben, nemlich daß es seye, Bas. ABC. Bas. EFG:: die Höhe der Spitz. HEFG. Höhe der Sp. DABC.

Zubereitung.

Verfertige die ▱ BM, FQ, gleich wie es in der vorgehenden Vorgab geschehen ist.

Beweiß.

Es ist klar, daß die zwey Eck-säulen ALICBD und GNPEFH dreymahlen so groß seyn, als die Spitzsäulen ADCB und GHEF. (dann sie auff einerley Basis stehen, und einerley Höhe haben.) d. 7. Cor. 11. d. d. Zub.

Nun ist die Spitzsäule ADCB ⊓ gegeben der Spitzsäule GHEF. d. d. Vorg.

Darumb ist auch die Eck-säule ALICBD ⊓, der Eck-säule GNPEF. d. 6. ax. 1.

Unterdessen seyno die ▱ BM und FQ gedoppelt deren Eck-säulen ADCB und GHEF. d. 28. 11.

Dahero ist das ▱ BM ⊓, dem ▱ FQ. d. 6. ax. 1.

Diese ▱ BM und FQ aber, haben wegen ihrer Gleichheit die Bases und Höhe wiederkehrlich geproportionirter. d. 34. 11.

Folget, daß auch die zwey gleiche Spitzsäule ADCB, GHEF, (welche just der sechste Theil seynd von denen ▱ BM, FQ, ihre Bases und Höhe wiederkehrlich geproportionirter haben. d. 15. 5.

11. Wann die Bases und Höhe deren Spitzsäule DABC, HEFG wiederkehrlich geproportionirter seint, nemlich wann es ist, als wie Basis ABC, Basis EFG:: die Höhe der Spitz. HEFG. Höhe der Spitz. DABC.

Dieſem nach ſagt man, daß die Spitzſäule DABC ⊓ ſeye, der Spitzſäule HEFG.
Die Zubereitung und Verfertigung der Figur verbleibet wie oben.
Nunmehro, weilen es iſt, Baſis oder △ ABC, zu Baſ. oder △ EFG :: die Höhe der andern Spitzſ. zu der Höhe der erſten Spitzſ. d.d. Vorg.
So wird auch ſeyn ▭ ABCK. ▭ EFGO :: die Höhe der andern zu der Höhe der einen. d. 15. 5.
Das iſt, in denen ⊟ BM und FQ ſeint die Baſes und Höhe einander widerkehrlich geproportionirter.
Darumb wird das ⊟ BM ⊓ ſeyn, dem ⊟ FQ. d. 34. 11.
Und folgends auch die Spitzſäule DABC ⊓, der Spitzſäule HEFG. d. 7. ax.
(dann ſie juſt der ſechſte Theil von denen ⊟ ſeint).

Welches zu beweiſen ware.

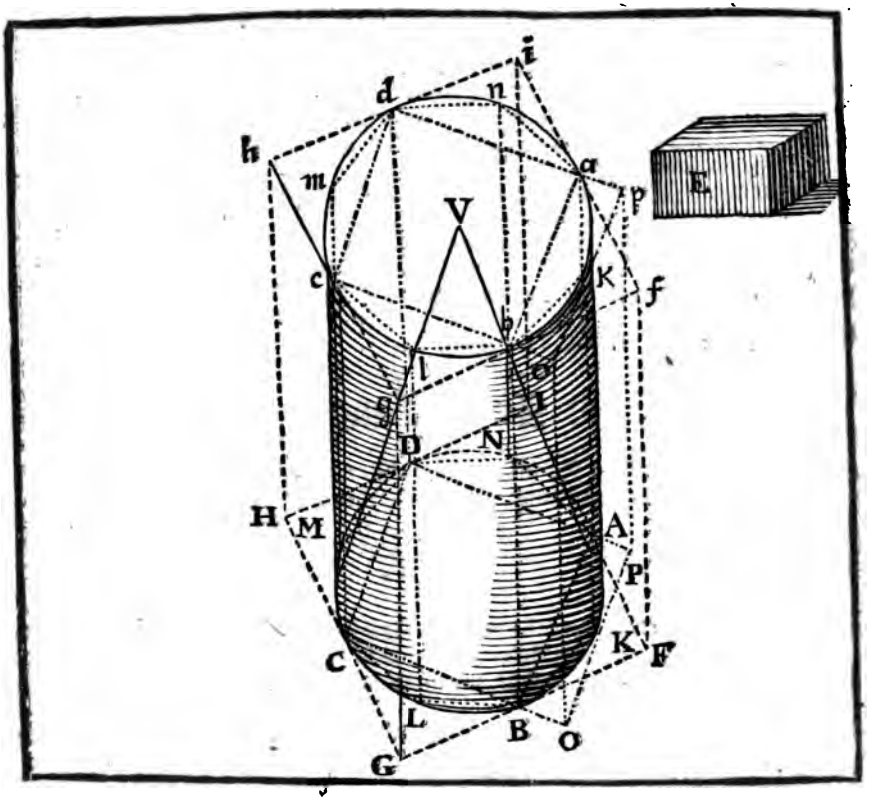
Anmerckung.

Eben alſo haben die andern Spitzſäulen, welche mehr als eine dreyeckichte Baſis haben, ihre Baſes und Höhe widerkehrlich geproportionirter.

Folge.

Was in der 6. 8. und 9. Vorgab von denen Spitzſäulen iſt geſagt worden, das jene kan man auch von denen Eckſäulen (dann ſie gradt dreymahlen ſo groß, als die Spitzſäulen ſeint) welche mit ihnen einerley Höhe und Baſis haben, beweiſen, nemlich,

I. Die Eckſäulen, ſo einerley Höhe haben, verhalten ſich gegen einander, gleich wie ihre Baſes.
II. Gleichförmige Eckſäulen halten ſich gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-ſagenden Seiten.
III. Gleiche Eckſäulen haben ihre Baſes und Höhe widerkehrlich geproportionirter, und welche widerkehrlich geproportionirt ſeint, ſeint auch einander gleich.



Die X. Vorgab. Betrachtung.

Ein jeder Kögel iſt der dritte Theil von einer Waltze, welche mit demſelben einerley Baſis und Höhe hat.

Es iſt gegeben der Kögel CVK, und die Waltze CcKk, welche einerley Höhe und einerley Baſis, nemlich den Zirckel ABCD haben. Dieſem nach ſagt man, daß der Kögel der dritte Theil von der Waltze ſeye.

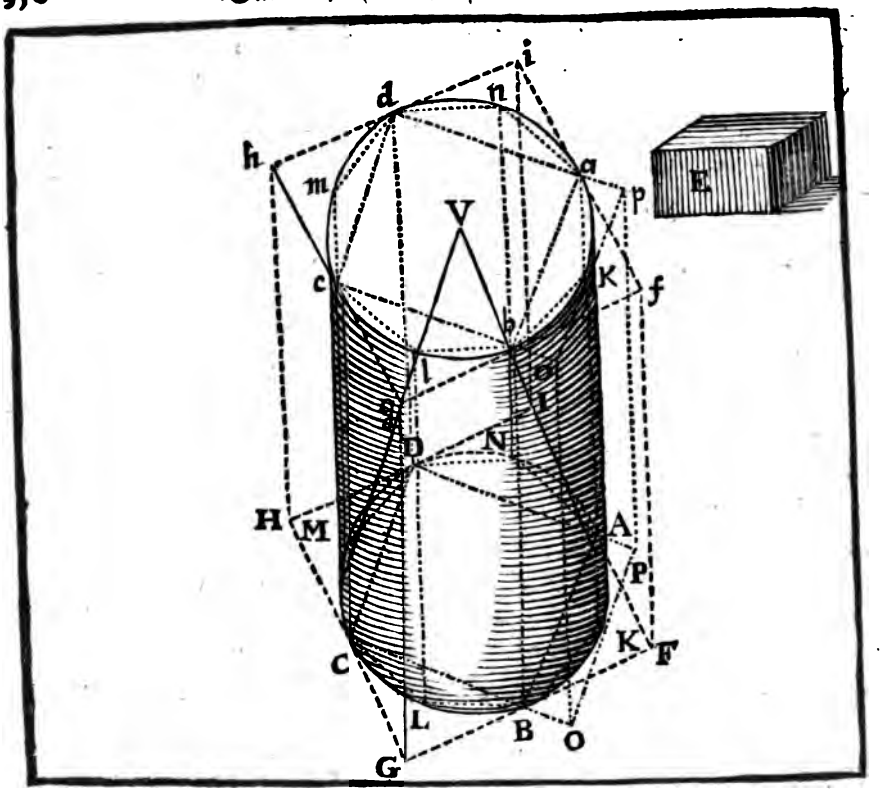
Beweiß.

Geſetzt, man widerſpreche es, ſagend, daß der Kögel der dritte Theil von der Waltze nicht ſeye, ſo folgete darauff, daß auch die Waltze nicht dreymahln ſo groß, ſondern entweder ⌜ oder ⌞, als der Kögel dreymahlen genommen, ſeye.

Seye zum erſten mahl geſetzt, daß die Waltze ⌜ ſeye, als der Kögel dreymahlen genommen. zu einem Exempel, umb die Gröſſe E.

Das iſt, die Waltze CcKk iſt ⌜, dem Kögel CVK dreymahlen genommen, = E.

Dieſem nach einſchreibe in den Zirckel das □ ABCD, und umb denſelben das □ FGHI.
Erhöhe auff dieſem □ die zwey ⌭ Aa, Bb, Cc, Dd, und Ff Gg, Hh, Ii, welche mit der Waltze, und dem Kögel einerley Höhe haben.
Nunmehro iſt klar, daß das □ ABCD die Helffte, deß □ FGHI ſeye. b. 9. an. 4.
Unterdeſſen verhaltet ſich eine Baſis zu der andern Baſis :: ein ⌭ zu dem andern ⌭ von einerley Höhe. b. 32. 11.
Folget, daß alſo das ⌭ Aa, Bb, Cc, Dd auch die Helffte deß ⌭ Ff, Gg, Hh, Ii, ſeye.
Jndeme aber das ⌭ Ff, Gg, Hh, Ii ⌜ iſt, als die Waltze CcKk. b. 9. ax. 1.
und folgends auch die Helffte des ⌭ Ff, u. ſ. f. ⌜, als die Helffte derſelben Waltze.
Darumb wird auch das ⌭ Aa, Bb, Cc, Dd ⌜ ſeyn, als die Helffte der Waltze:
Abtheile ferner juſt entzwey die Umbkreiß-Stücke AB, BC, CD, DA in denen Puncten K, L, M, N, und hange zuſammen AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA.
Durch K ziehe OKP, welche den Zirckel berühre, und mit BA ═ lauffe, auch mit denen verlängerten CB, DA in denen Puncten O, P zuſammen komme, und das ▭ AO geſtalte.
Erhöhe auff dem ▭ AO die Eckſäule Aa, Pp, Oo, Bb, und auff dem △ AKB die Eckſäule Aa, Kk, Bb, welche mit der Waltze und dem Kögel einerley Höhe haben.
Weilen demnach der △ AKB die Helffte deß ▭ APOB iſt: b. 41. 1.
ſo wird auch die Eckſ. Aa, Kk, Bb die Helffte der Eckſ. Aa, Pp, Oo, Bb, ſeyn. b. 32. 11.
Und deßwegen wird die Eckſäule Aa, Kk, Bb ⌜ ſeyn, als die Helffte des Waltzen-Schnitzes Bb, Kk, Aa, welcher zur Baſis die gerade Linie AB und den Bogen AKB hat.
Auff dieſe Weiſe ſeint auch die übrigen Eckſäulen Cc, Ll, Bb, u. ſ. f. ⌜, als die Helffte deren Waltzenſchnitze Bb, Ll, Cc, u. ſ. f.
Und folgends ſeint alle dieſe Eckſäulen ſammentlich ⌜, Als die Helffte aller dieſer Waltzenſchnitze ſammentlich.
Wann man abermahlen die Umbkreißſtücke AK, KB, u. ſ. f. juſt entzwey ſchneidet, und (wie vorgehends) Eckſäulen darauff machet,
So werden auch ſolche Eckſäulen ſammentlich ⌜ ſeyn, als die Helffte deren Waltzenſchnitze, welche zur Baſis die kleinen geraden Linien, und die kleinen Zirckelbogen haben.
Wann jetzunder der gantzen Waltze CcKk mehr als die Helffte, nemlich das ⌭ Aa, Bb, Cc, Dd, und von denen übrigen Waltzen-ſchnitzen auch mehr als die Helffte, nemlich die Eckſäule Aa, Kk, Bb, u. ſ. f. abgezogen werden.
So werden letztlich einige Waltzenſchnitze überbleiben, welche zuſammen genommen ⌝ ſeint, als die Gröſſe E, ſo der Unterſcheid iſt, umb welchen die Waltze ⌜ iſt, als der Kögel dreymahlen genommen. b. 2. Lem. 13.



Setzet man nun, daß nach verrichtem Abzug die Waltzenschnitze Aa, Ll, Kk, Bb, u. s. f. übergeblieben seint, welche zusammen genommen ⅂ seint, als E. So wird

(weilen die Waltze ⌐ gesetzt worden ist, dem Kögel dreymahlen genommen, → E.

Unterdessen aber man auß der Waltze die übergebliebene Waltzenschnitze, und auß dem Kögel dreymahlen genommen → E, dieselbe E (welche ⌐ bewiesen worden ist, als gedachte Waltzenschnitze) abziehet.

Die übrigen Eckſäulen Aa, Kk, Bb, Ll, Cc, Mm, Dd, Nn, auch ⌐ verbleiben, als der Kögel dreymahlen genommen.

Und deßwegen wird der Kögel ⅂ seyn, als der dritte Theil der Waltze.

Entzwischen ist der Eckſäulen Aa, Kk, Bb, Ll, Cc, Mm, Dd, Nn, dritter Theil eine Spitzſäule, welche mit derselben einerley Höhe und Basis hat. 5.7. 12.

Folget, daß also der Kögel CVK ⅂ wäre, als gedachte Spitzſäule, nemlich das gantze ⅂, als sein Theil, so nicht seyn kan.

Dahero ist die Waltze nicht ⌐, als der Kögel dreymahlen genommen.

Setzet man aber, daß die Waltze Cc Kk ⌉ ſeye, als der Kögel CVK dreymahlen genommen:

So wird alsdann der Kögel ⌈ ſeyn, als ein dritter Theil von der Waltze.

Seye dahero der Kögel dreymahlen genommen ⌈, als die Waltze umb die Gröſſe E, alſo zwar,

Daß der Kögel CVK ⌈⌉ ſeye dem dritten Theil der Waltze + E.

Nunmehro zubereite die Figur, wie vorhero geſchehen iſt, auſſerhalb, daß an ſtatt der Eckſäulen, lauter Spitzſäulen, welche mit der Waltze und dem Kögel einerley Höhe haben, gezogen zu ſeyn verſtanden werden.

Hernach abziehe auß dem Kögel CVK die Spitzſäule (als wie vorgehends die Eckſäule auß der Waltzen CcKk), biß endlich einige Kögelſchnitze überbleiben, welche zuſammen genommen ⌉ ſeint, als E.

Nachdem nun der Kögel CVK ⌈⌉ geſetzt worden iſt, dem dritten Theil der Waltze, + E;

Unterdeſſen aber, wann man auß dem Kögel die übergebliebene Kögelſchnitze, und auß dem dritten Theil der Waltze + E, dieſelbe Gröſſe E (welche ⌈ iſt bewieſen worden, als gedachte Schnitze) abziehet.

So wird die übrige Spitzſäule (deſſen Baſis das Viel-Eck AKBLC MDN iſt, und einerley Höhe mit dem Kögel und der Waltze hat) auch ⌈, als der dritte Theil der Waltze, ſeyn.

Und deßwegen wird auch dieſe Spitzſäule dreymahlen genommen ⌈ ſeyn, als die gantze Waltze Cc Kk.

Entzwiſchen iſt die Eckſäule Aa, Kk, Bb, Ll, Cc, Mm, Dd Nn dreymahlen ſo groß, als gedachte Spitzſäule. d. 7. 12.

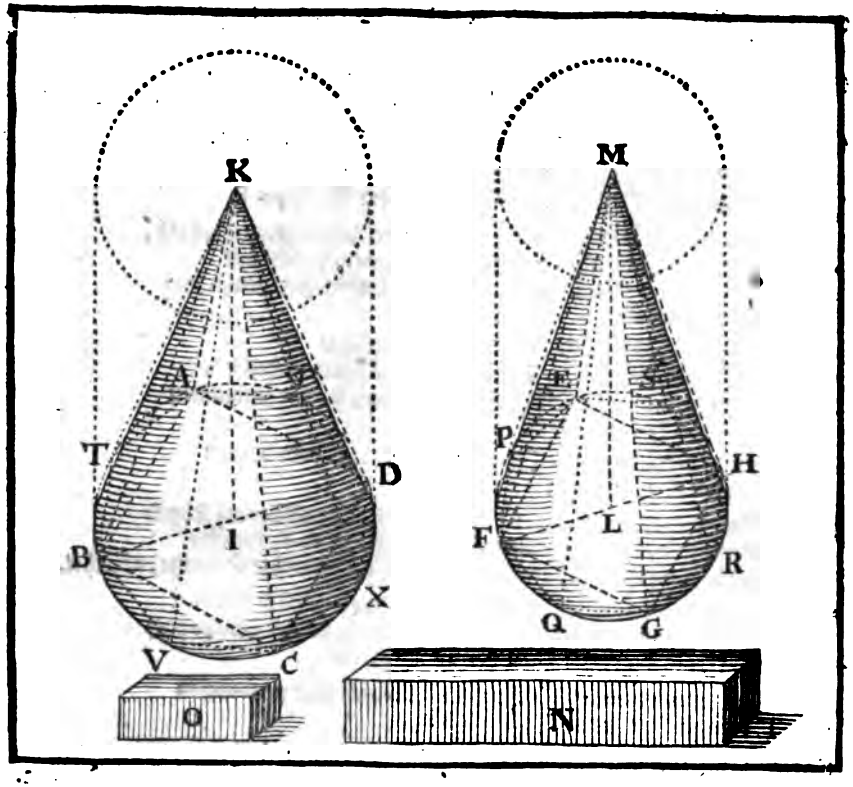
(dann ſie einerley Baſis, und mit dem Kögel und der Waltze einerley Höhe haben).

Dahero ſolte auch die Eckſäule Aa, u. ſ. f. ⌈ ſeyn, als die Waltze Cc Kk, nemlich der Theil ⌈, als ſein gantzes, ſo nicht möglich iſt.

Worauß dann letztlich erſcheinet, daß die Waltze auch nicht ⌉ ſeye, als der Kögel dreymahlen genommen; ſondern ſie werden nothwendig demſelben dreymahlen genommen ⌈⌉ ſeyn müſſen.

Und deßwegen iſt der Kögel CVK juſt der dritte Theil der Waltze Cc Kk.

Welches zu beweiſen ware.



Die XI. Vorgab. Betrachtung.

Die Kögeln und Waltzen, so einerley Höhe haben, verhalten sich gegen einander, gleich wie ihre Baſes.

Es seint gegeben die zwey Kögel, und die zwey Waltzen, welche zu ihren Baſes die Zirckel ABCD, EFGH, und zu ihrer Höhe die gleiche IK, LM haben.

Diesem nach sagt man, daß sich verhalte

Baſ. ABCD, Baſ. EFGH :: { der eine Kögel K, zu dem andern M. / die eine Waltze K, zu der andern M.

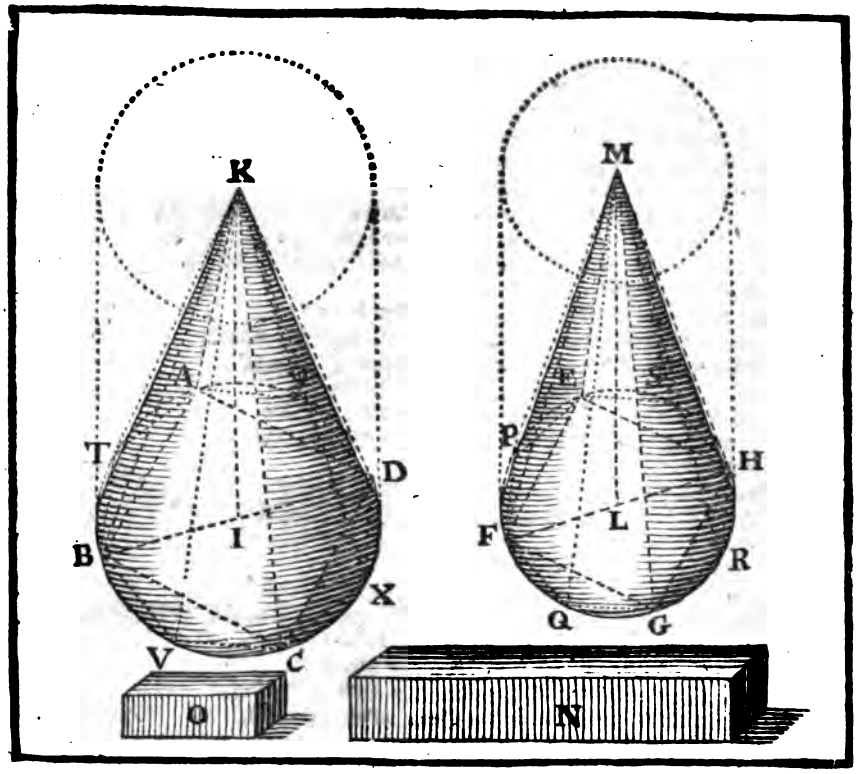
Beweiß.

Wann es nicht geglaubt wird, so seye, daß die Baſis ABCD zu der Baſis EFGH sich verhalte: als wie der Kögel ABCDK zu einer andern Gröſſe, gleich wie zu N, welche hernach Γ, oder ⅂ seyn muß, als der Kögel EFGHM.

Dann gleich kan sie demselben nicht seyn,

Sonsten hätte der Kögel ABCDK, so wol zu dem Kögel EFGHM, als zu N einerley Verhaltnuß.

Und deßwegen ſich verhalten würde ein Kögel zu dem andern:
Als wie eine Baſis zu der andern, welches noch nicht geſtattet wird.
Setze derohalben geſetzt, daß erſtlich N ⌉ ſeye, als der Kögel
EFGHM, umb die Gröſſe O, auff ſolche Geſtalt,
daß der Kögel EFGHM ⌈ ſeye, denen N + O.
Dieſem nach einſchreibe in den Circkel das □ EFGH.
Hernach verfertige die Figuren, und rede darüber, gleich wie in
der vorhergehenden Vorgab geſchehen iſt.
So wird endlich herauß kommen, daß alle überbliebene Kögelſchnitze,
als wie EMP, PMF u. ſ. f. zuſammen genommen ⌉ ſeint, als O,
welche der Unterſcheid iſt, umb welchen der Kögel EFGHM die
Gröſſe N übertreffet.
Weilen nun der Kögel EFGHM ⌈ geſetzt iſt, der N + O,
Und man entzwiſchen aus ſolchem Kögel die gedachte Kögel-
Schnitze, und auß N + O, dieſelbe N (welche ⌈ zu ſeyn
bewieſen iſt, als gedachte Kögel-Schnitze) abziehet.
So folget, daß die übrige Spitzſäule EPFQGRHSM, welche
mit dem Kögel einerley Höhe hat, auch ⌈ verbleibe, als
die Gröſſe N.
Unterdeſſen einſchreibe in den Zirckel ABCD das Viel-Eck
ATBVCXDY, welches gleichförmig ſeye dem Viel-Eck
EPFQGRHS.
Ziehe die Diametern BD und FH.
Dieſem nach, weilen ſich der Zirckel ABCD, zu dem Zirckel EFGH d. 2. Cor. 12.
haltet, als wie das Viel-Eck ATBVCXDY, zu dem Viel-Eck EPFQGRHS.
Wie ſich aber der Zirckel ABCD, zu dem Zirckel EFGH haltet:
Alſo iſt geſetzt worden der Kögel ABCDK zu der Gröſſe N.
Und als wie die Baſ. ATBVCXDY. zu der Baſ. EPFQGRHS::
die Spitz. ATBVCXDYK. zu der Spitz. EPFQGRHSM, d. 6. 12.
welche mit dem Kögel einerley Höhe haben.
Dahero wird ſich auch die Spitz. ATBVCXDYK zu der Spitz.
EPFQGRHS verhalten: als wie der Kögel ABCDK, zu N.
Weilen aber die Spitz. ATBVCXDYK ⌉ iſt, als der Kögel
ABCDK (nemlich der Theil iſt ⌉, als ſein gantzes).
So folget, daß auch die Spitzſäule EPFQGRHS ⌉ ſeye als N.
Welches ungereimt iſt, maſſen ſie allererſt ⌈ iſt bewieſen
worden, als dieſelbe N.
Dahero iſt N nicht ⌉, als der Kögel EFGM.
Sagt man hingegen, daß N ⌈ ſeye, als der Kögel EFGM.
Indeme nun geſetzt iſt, daß, wie ſich der Zirckel ABCD, zu dem
Zirckel EFGH verhalte: Alſo ſeye der Kögel ABCDK, zu N.
Und durch die Umkehrung EFGH, ABCD::N, ABCDK.
Setze man jetzund, daß ſich N, zu dem Kögel ABCDK verhalte:
als wie der Kögel EFGHM, zu der Gröſſe O.
Weilen aber N ⌈ geſetzt worden iſt, als der Kögel EFGHM.
ſo wird auch der Kögel ABCDK ⌈ ſeyn, als O. d. 14. ſ.
Dahero, wie ſich der Zirckel EFGH zu dem Zirckel ABCD verhaltet;
alſo iſt auch der Kögel EFGHM, zu O. Welches aber nicht ſeyn kan.



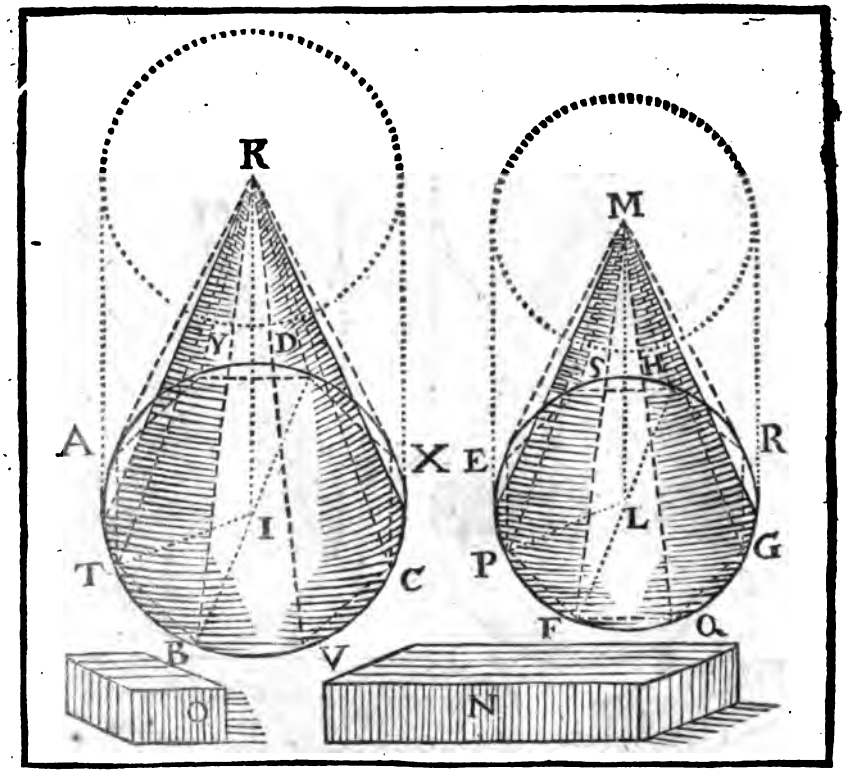
Dann O ⌝ iſt, als der Kögel ABCDK, und ſchon vorgehends bewieſen worden, daß unmöglich ſeye, daß ſich ein Kögel zu einer Gröſſe, welche ⌝ iſt, als derſelbe Kögel verhalte:
Als wie eine Baſis eines Kögels, zu der andern Baſis, deß andern Kögels.

Darumb iſt N auch nicht ⌜, als der Kögel EFGHM,
ſondern N werde nothwendig demſelben Kögel ⌜⌝ ſeyn müſſen.

Und deßwegen wie ſich die Baſis ABCD, zu der Baſis EFGH
verhaltet: alſo wird ſich auch der Kögel ABCDK, zu dem Kögel
EFGHM verhalten. d. 7. 5.

Letztlich wird auch ſeyn, als wie die Baſis ABCD, zu der Baſis EFGH
ſich verhaltet: alſo iſt eine Waltze, zu der andern Waltze. d. 15. 5.
(dann die Waltze dreyfach ſeint deren Kögeln, welche mit ſolchen
einerley Höhe und Baſes haben). Dahero die Kögeln. u. ſ. f. d. 10. 12.

Welches zu beweiſen ware.



Die XII. Vorgab. Betrachtung.

Gleichförmige Kögeln und Waltze halten ſich gegen einander, in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche die Diametern ihrer Baſen gegen einander haben.

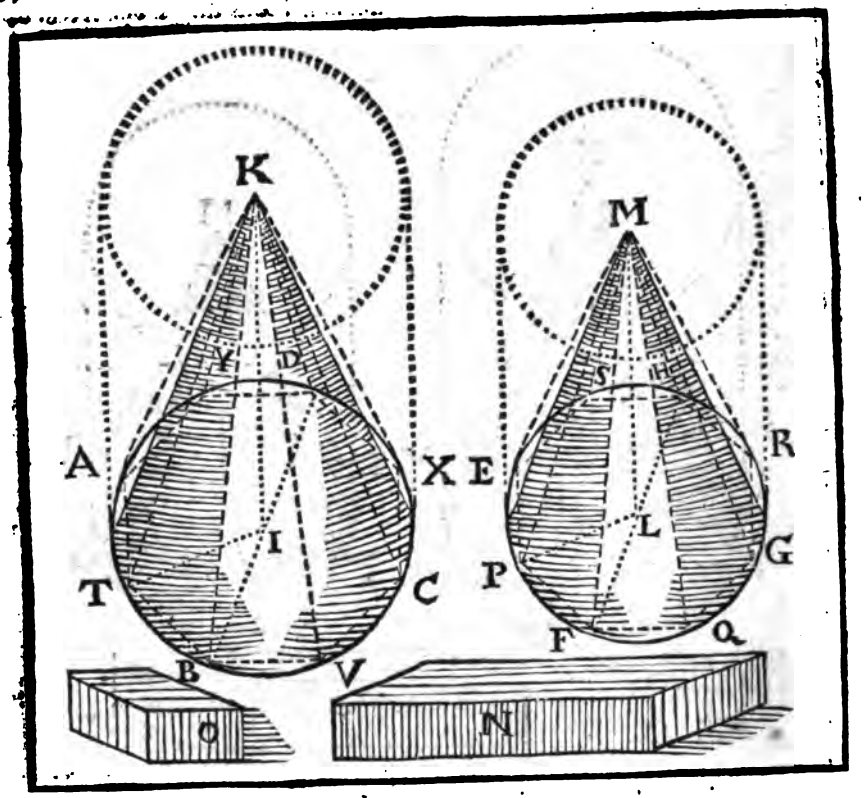
Es ſeint gegeben die zwey gleichförmige Kögeln und Waltzen, deren Baſes die Zirckeln ABCD, EFGH, und die Diametern ihrer Baſen BD, FH, und die axe IK, LM ſeint. Dieſem nach ſagt man, daß der eine Kögel, zu dem andern, und auch eine Waltze zu der andern ſich in dreymahliger Verhaltnuß der jenen, welche ein Diameter zu dem andern hat, verhalte.

Beweiß.

Wann es nicht geglaubet wird, ſo ſeye, daß der Kögel ABCDK zu einer andern Gröſſe, wie nemlich zu N, in dreymahliger Verhaltnuß, welche der Diameter BD, zu dem Diameter FH hat, ſtehe.

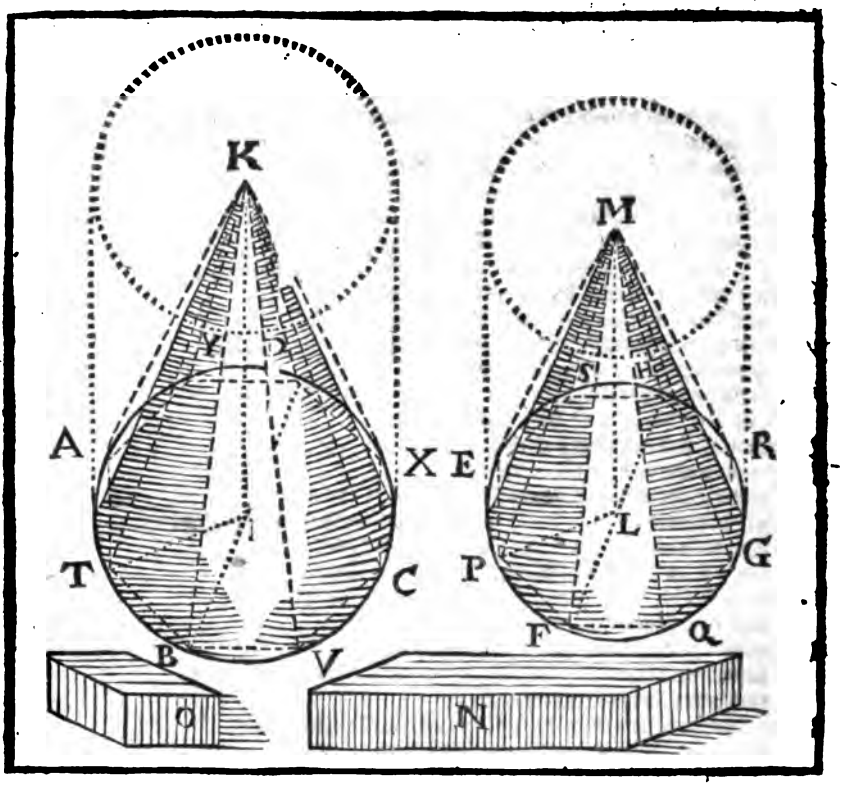
Nun iſt klar, daß N entweder ⅂, oder Γ, als der Kögel EFGHM ſeyn muß.

Dann wann ſie ihme gleich wäre: ſo hätte der Kögel ABCDK einerley Verhaltnuß zu dem Kögel EFGHM und der Gröſſe N. 8.7.5.



Und dahero wäre der Kögel ABCDK, zu dem Kögel EFGHM auch in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, ſo der Diameter BD, zu dem Diameter FH hat.
welches aber hier noch nicht zugelaſſen wird.
Seye dahero geſetzt, daß N ⌝ ſeye, als der Kögel EFGHM umb die Gröſſe O.
Dieſem nach zubereite und verfertige die Figuren, gleichwie in der vorhergehenden Vorgab geſchehen iſt, damit man beweiſen möge, daß die Spitzſäule EPFQGRS ⌜ ſeye, als N.
Hange hernach TI und FL zuſammen.
Dieweilen der Kögel ABCDK gleichförmig gegeben iſt dem Kögel EFGHM.
So werden ſie ihre Diametern und Axen gegen einander geproportionirter haben. d.24.def.11.
Und dahero ſeyn BD. FH (oder BI. FL) :: IK. LM. d. 15. 5.
Und durch die Verwexlung BI. IK :: FL. LM.
Nunmehro iſt in dem △ BIK der ∠ BIK ⌐ dem ∠ FLM in △ FLM (dann beyde rechte ∠ ſeint) d.3.def.11.
Und die Seiten BI, IK ſeynd geproportionirt denen Seiten FL, LM.

Folget, daß auß dieser Ursach der △ BIK gleichförmig seye, dem △ FLM. [d. 6. 6.
So ist auch der △ BIT gleichförmig dem △ FLP. [und 4.
(dann die ∠ I und L auff gleichförmigen Bögen stehen,
und dahero sie einander ⌐ seynd; über diß d. 22. an. 9.
wegen deren gleichen Seiten BI, TI, und FL, PL sich alsdann
verhaltet BI, TI :: FL, PL)
Dahero wie sich verhaltet KB, BI :: MF, FL.
als wie aber BI, BT :: FL, FP.
Folget, daß aus dergleichen seye KB, BT :: MF, FP. d. 22. 5.
Entzwischen, weilen die Seite BI, IK, und der ∠ BIK deß △ BIK.
⌐ seynd, denen Seiten TI, IK, und dem ∠ TIK deß △ TIK. d. 3. def. 11.
So wird auch die Basis BK ⌐ seyn, der Basis TK. d. 4. 1.
auff diese Weise wird auch FM ⌐ seyn, der PM.
Und hierdurch wegen Gleichheit deren Seiten werden KB, KT
geproportionirt seyn, denen MF, MP.
Indeme sich aber verhaltet KB, BT :: KT zu derselben BT. d. 7. 5.
und auch MF, FP :: MP, zu derselben FP.
Vorgehends sich auch verhalten KB, BT :: MF, FP.
Dahero seyn werde KT, BT :: MP, FP.
und durch die Umbkehrung BT, KT :: FP, MP.
Das ist, in denen zwey △ BKT, FMP seynd die Seiten einander
proportionirlich, nemlich TK, KB :: PM, MF,
und KB, BT :: MF, FP, und BT, TK, :: FP, PM.
Dahero ist der △ BKT gleichwincklicht dem △ FMP.
und deßwegen auch einander gleichförmig. d. 5. 6.
Auff solche Art wird bewiesen, daß auch die übrige △
der Spitz-Säule ATBVCXDY und EPFQGRHS einander
und unter sich gleichförmig seynd.
Weilen demnach gedachte Spitzsäule auch an der Anzahl
die △ beyderseits einander gleich haben:
So werden eben diese zwey Spitzsäulen einander gleichförmig seyn, d. 9. def. 11.
Und deßwegen sich gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß
derjenigen, welche eine gleichförmig-haltnuß sagende Seiten
BT, zu der andern FP hat, verhalten. d. 8. Cor. 12.
Es ist unterdessen BT, FP :: BI, FL.
(dann der △ BIT gleichförmig ist, dem △ FLP)
Und auch als wie BI, FL :: BD, FH. d. 15. 5.
Dahero wird eine Spitzsäule, zu der andern in dreymahliger
Verhaltnuß seyn, der jenen, welche ein Diameter BD
zu dem andern FH hat.
Es ist aber auch anfanglich gesetzt worden, daß der Kögel
ABCDK zu N in dreymahliger Verhaltnuß derjenen
seye, welche ein Diameter D, zu dem andern FH hat.
So folget dann, daß sich die eine Spitzsäule ATBVCXDY zu
der andern Spitzsäule EPFQGRHS verhalte, als wie der
Kögel ABCDK, zu der Grösse N.
Unterdessen ist die Spitzsäule ATBVCXDY ⌐, als der Kögel
ABCDK (nemlich der Theil ist ⌐, als sein gantzes).



Dahero die Spitzſaule EPFQGRHS auch ⌐ ſeyn muß, als die Gröſſe N, welche aber anfänglich iſt ⌈ bewieſen worden, als dieſelbe Spitzſäule. So gantz ungereimt iſt.

Darauß ſchlieſſet man aber, daß alſo die Gröſſe N nicht ⌐, als der Kögel EFGHM ſeyn könne.

Setze man jetzund, daß N. ⌈ ſeye, als der Kögel EFGHM.

Weilen ſchon anfänglich geſetzt worden iſt, daß der Kögel ABCDK zu N in dreymahliger Verhaltnuß ſeye der jenen, welche ein Diameter BD, zu dem andern FH hat.

Und auch durch das vorgehende bewieſen worden iſt, daß die Spitzſäule ATBVCXDY, zu der Spitzſäule EPFQGRHS in dreymahliger Verhaltnuß ſeye derjenen, welche der Diameter BD, zu dem andern Diameter FH hat.

So wird demnach ſeyn, daß, als wie ſich der Kögel ABCDK, zu N verhaltet: alſo ſich eine Spitzſäule zu der andern verhalten werde.

Und durch die Umbkehrung, wie N, zu dem Kögel ABCDK: alſo wird die andere Spitzſäule EPFQGRHS, zu der erſten Spitzſäule ATBVCXDY ſeyn.

Indeme aber die Spitzsäule EPFQGRS zu der Spitzsäule ATBVCXDY in dreymahliger Verhaltnuß ist, deren gleichförmig-haltnuß-sagenden Seiten PE, zu TB. (oder deß Diameters EH, zu BD) 5.8.Cor.12.

So wird auch N, zu dem Kögel ABCDK in dreymahliger Verhaltnuß seyn, der jenen, welche der Diameter EH, zu BD hat.

Seye unterdessen gesetzt, daß, als wie N, zu dem Kögel ABCDK sich verhalte: also der Kögel EFGHM, zu einer Grösse, als wie zu O, seye.

Indeme aber jetzund N. ⌜ ist gesetzt worden, als der Kögel EFGHM.

So wird auch der Kögel ABCDK ⌜ seyn müssen, als O. 5.14.5.

Und deßwegen wird der Kögel EFGHM, zu der Grösse O (welche ⌝ ist, als der Kögel ABCDK) auch in dreymahliger Verhaltnuß seyn, derjenen, welche der Diameter FH, zu dem Diameter BD hat.

Welches aber ungereimt ist: massen schon vorgehends bewiesen worden ist, daß nicht seyn könne, daß ein Kögel zu einer andern Grösse, welche ⌝ ist, als der Kögel, in dreymahliger Verhaltnuß der jenen stehe, welche die Diametern deren Basen gegen einander haben.

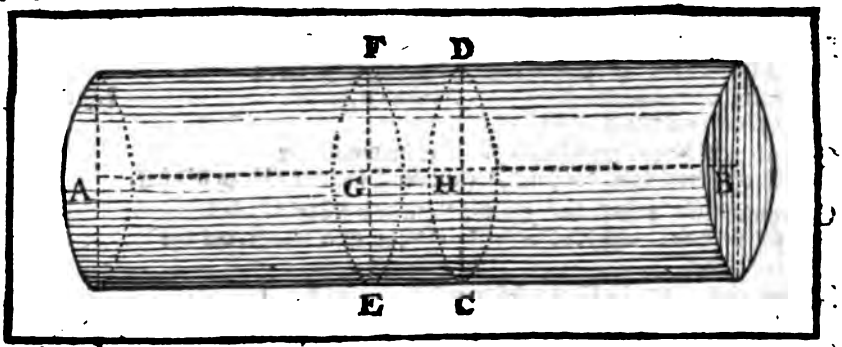
Dahero ist N auch nicht ⌜, als der Kögel EFGHM, sondern sie muß nothwendig demselben ⌐ seyn.

Und darum (weilen man anfänglich gesetzt hat, daß der Kögel ABCDK, zu N in dreymahliger Verhaltnuß seye, deß Diameters BD, zu dem Diameter FH)
Auch derselbe Kögel ABCDK, zu dem andern Kögel EFGHM in dreymahliger Verhaltnuß seyn werde, derjenen, welche der Diameter BD, zu dem Diameter FH hat. 5.7.5

Letztlich, weilen die Waltze, gerädt dreyfach seynd deren Kögeln, welche einerley Höhe und Bases haben:

So werden auch die Waltze, eine zu der andern, in dreymahliger Verhaltnuß seyn, derjenen, welche ein Diameter der einen Basis, zu dem Diameter der andern Basis hat.

Welches zu beweisen ware.



Die XIII. Vorgab. Betrachtung.

Wann eine Waltze mit einer Fläche, ſo denen gegenüberſtehenden Baſen Parallel iſt, durchſchnitten wird: ſo werden ſich die Waltzen-Stücke gegen einander verhalten, gleich wie ihre Axen.

Es iſt gegeben, daß die Waltze AB mit der Fläche EF, welche denen Baſen A und B ═ iſt, durchſchnitten ſeye. Dieſem nach ſagt man, daß, als wie ſich die Axe AG, zu GB verhalte: alſo ſich das Waltzenſtücke AG zu dem Waltzenſtück GB verhalten werde.

Zubereitung. Nehme nach Gefallen auff der Linie GB einen gerad-auffmeſſenden Theil, gleich wie GH, welcher zu einem Exempel, der vierdte Theil von GB iſt.

Durch dieſen ziehe die Fläche CHD ═, denen Baſen A und B.

Beweiß. Dieweilen GH der vierdte Theil von der Linie GB iſt.

So werden nothwendig in der übrigen HB, noch drey Theile, (welche inſonderheit ▭ ſeynd der GH) ſeyn müſſen.

Wann man nun durch ſolche auch einige Fläche, ſo denen Baſen ═ ſeint, ziehet:

So wird man drey Waltzenſtücke hieraus kriegen, deren eine jede inſonderheit ▭ iſt, dem Waltzenſtücke EFDC. b. 11. 12.
(dann ſie einerley Höhe und Baſes haben).

Dahero iſt das Stück EFDC ſowol der vierte Theil der Waltze GB, als die Linie GH der vierdte Theil der Axe, oder Linie GB.

Unterdeſſen ſetze man, daß GH in der Linie AG gerad dreymahlen ſeye, und durch ſolche Theile auch einige Fläche, welche denen Baſen ═ ſeynd, gezogen worden ſeynd.

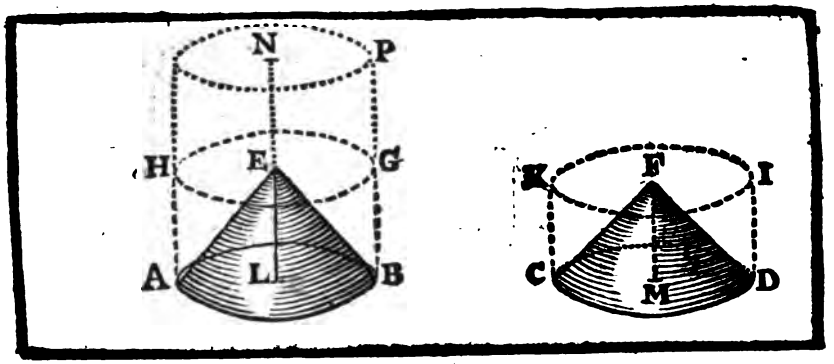
So wird, als wie vorgehends, bewieſen, daß auch drey Waltzenſtücke in dem Stück AG ſeyn werden, deren ein jedes inſonderheit ▭ iſt, dem Waltzenſtück EFDC.

Dahero, wie offt die Linie GA einen vierdten Theil von der Linie GB begreiffet: ſo offt wird auch das Waltzenſtück AG einen vierdten Theil von dem Waltzenſtück GB begreiffen u. ſ. f.

Darumb wie ſich verhaltet die Axe AG, zu der Axe GB; alſo ſich verhalten werde das Waltzenſtück AG, zu dem Waltzenſtück GB. b. 6. def. 5.

Welches zu beweiſen ware.

Mercke, was man hier mit dem vierten Theil bewieſen hat, mag auch mit einem jeden andern unterwilfachen Theil bewieſen werden.



Die XIV. Vorgab.

Betrachtung.

Die Waltze und Kögeln, welche gleiche Baſes haben, verhalten ſich gegen einander, als wie ihre Höhe.

Es ſeynd gegeben die Waltze LN, MF, welche gleiche Baſes AB, CD, haben. Dieſem nach ſagt man, daß ſich die Waltze LN, zu der Waltze MF verhalte, gleich wie die Höhe LN, zu der Höhe MF.

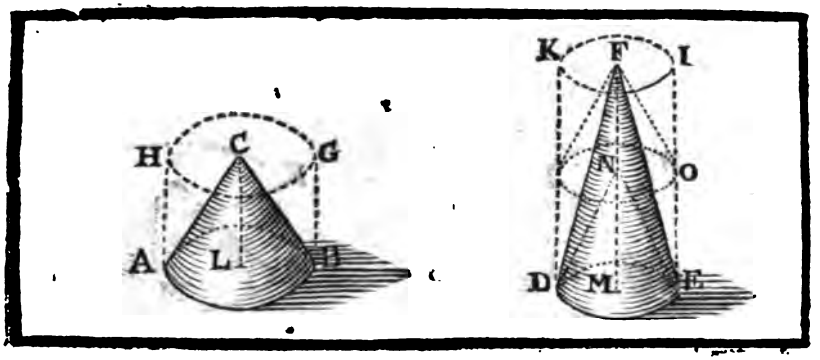
Zubereitung.

Auff der Gröſſern Höhe LN, mache LE □, der MF,
Durch E ziehe die Fläche HG ═, denen Baſen.
ſo entſtehen darauß die Waltze LE und EN.

Beweiß.

Die Waltze LE iſt □, der Waltze MF. d. 11. 12.
Unterdeſſen verhaltet ſich die Waltze LN, zu der Waltze LE, als wie die axe, oder Höhe LN: zu der Axe, oder Höhe LE, oder dergleichen MF. d. 13. 12.
Darumb wird ſich auch die Waltze LN, zu der Waltze MF verhalten, gleich wie die Höhe LN, zu der Höhe MF.
Weilen nun die Kögeln geradt ein drikter Theil deren Waltze ſeynd. d. 10. 12.
So folget, daß ſich auch ein Kögel zu dem andern verhalte: als wie eine Höhe zu der andern. d. 15. 5.

Welches zu beweiſen ware.



Die XV. Vorgab. Betrachtung.

Gleiche Waltze, und Kögeln haben ihre Baſes und Höhe Widerkehrlich geproportionirter: und welche ihre Baſes, und Höhe widerkehrlich geproportionirter haben, ſeynd einander gleich.

Es ſeynd gegeben die zwo gleiche Waltze LC, MF. Diesem nach ſagt man, daß ſich die Baſis AB, zu der Baſis DE verhalte, als wie die Höhe MF, zu der Höhe LC.

Zubereitung.

Auff der gröſſern Höhe MF, mache MN □, der LC.
Ziehe durch N die Fläche NO ═, denen Baſen.
Woraus die zwey Waltze DO, OK erwachſen.

Beweiß.

Die zwey Waltze LC, MN haben einerley Höhe. 5. d. Zuſ.
Dahero als wie ſich haltet die Baſis AB, zu der Baſis DE:
Alſo iſt die Waltze LC, zu der Waltze MN. 5. 11. 12.
Als wie ſich aber verhaltet die Waltze LC, zu der Waltze MN:
Alſo iſt die Waltze MF, zu derſelben Waltze MN. 5. 7. 5.
(Dann die Waltze LC □ gegeben iſt, der Waltze MF)
Und auch wie die Waltze MF, ſich zu der Waltze MN verhaltet: 5. 14. 12.
Alſo iſt die Linie oder Höhe MF, zu der Linie oder Höhe MN.
Folget darumb letztlich, daß ſich die Baſis AB, zu der Baſis DE verhalte, als wie die Höhe MF, zu der Höhe LC.
Welches zum erſten zu beweiſen ware.

Wann ſich hernach die Baſis AB, zu der Baſis DE verhaltet,
Als wie die Höhe MF zu der Höhe LC, ſo ſagt man,
Daß die Waltze LC □ ſeye der Waltze MF.
Die Zubereitung bleibet wie vorgehends.

Weiters iſt, als wie die Baſis AB, zu der Baſis DE :: die Höhe MF, zu der Höhe LC. d. d. Vorg.

Als wie ſich aber die Baſis AB, zu der Baſis DE verhaltet :: iſt die Waltze LC, zu der Waltze MN. (dann ſie einerley Höhe haben). d. 11. 12.

Und als wie die Höhe MF zu der Höhe LC, oder dergleichen MN, :: iſt die Waltze MF, zu der Waltze MN. d. 14. 12.

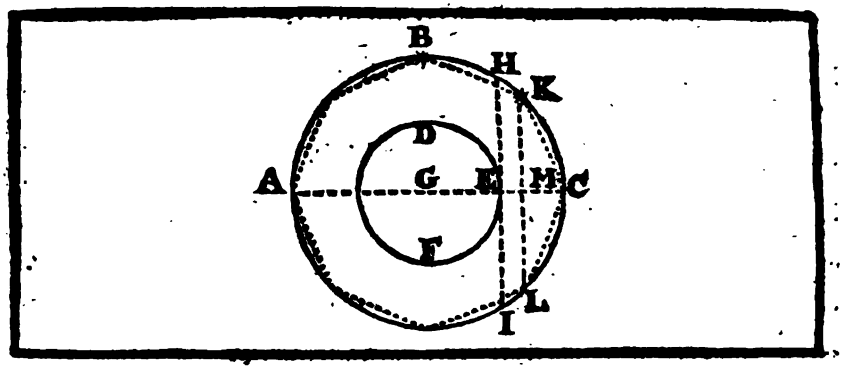
Dahero auch ſeyn werde; als wie ſich verhaltet die Waltze LC, Zu der Waltze MN :: die Waltze MF, zu derſelben Waltze MN.

Und deßwegen iſt die Waltze LC ⌐, der Waltze MF. d. 9. 5.

Unterdeſſen ſeynd die Kögeln grad ein Drittheil von denen Waltze, u. ſ. f. d. 10. 12.

Dahero ſolche ihre Baſes und Höhe auch widerkehrlich geproportionirter haben. u. ſ. f.

Welches zu beweiſen ware.



Die XVI. Vorgab. Handgriff.

Es seynd zwey Zirckeln, so einerley Mittel-Punct haben, gegeben, man verlanget in dem gröſſern Zirckel ein gleichseitiges Viel-Eck, welches gleiche und an der Anzahl gerade Seiten habe, einzuschreiben, doch, daß sothanes Viel-Eck den kleinern Zirckel nicht berühre.

Es seynd gegeben die zwey ungleiche Zirckeln ABC, DEF, welche einerley Mittel-Punct G haben. Diesem nach verlangt man in dem gröſſern Zirckel ABC ein gleichseitiges Viel-Eck, so die Seiten an der Anzahl grad hat, einzuschreiben, doch mit diesem Beding, daß solches den kleinern Zirckel DEF nicht berühre.

Handgriff.

Ziehe durch den Mittel-Punct G die gerade Linie AC, welche den Zirckel DF in E durchschneide.

Durch E ziehe HEI bleyrecht auff AC, und daß sie den Zirckel DEF in E berühre. d. 16. 3.

Indeme nun der Bogen ABHC ⌐ ist, als der Bogen HC. d. 9. ax. 1.
wann man unterdessen auß ABHC die Helffte, nemlich AB, hinweg nemmet; und abermahlen aus der übrigen Helffte BC, die Helffte, und auß der übergebliebenen Helffte wiederumb die Helffte abziehet. u. s. f.

So ist klar, daß letztlich ein Bogen überbleiben werde, welcher ¬ seyn solte, als der Bogen HC. d. 2. Lem. 12.

Gesetzt ein solcher Bogen seye KC, so ¬ ist, als der Bogen HC.

Ziehe K. C zusammen.

So wird KC eine Seite von dem verlangten Viel-Eck seyn.

Beweiß.

Weilen der Bogen KC ein gerader Theil, nemlich die Helffte von einer andern Helffte, und so fort, ist.

So folget klar, daß derselbe KC den gantzen Zirckel ABC grad auffmesse, und auch die Bogen an der Anzahl gleich habe.

Wann nun ſothane Bögen, gleich wie KC, mit geraden Linien unterſpannet werden.

So werden auch ſolche Linien einander ⊓ ſeyn. d. 29. 3.
Und dahero iſt das eingeſchriebene Vieleck erſtlich gleichſeitig, alsdann wegen der Bögen, ſo an der Anzahl gerad gemacht worden ſeynd, hat es die Seiten an Anzahl gerad.

Daß aber diß Viel-Eck den Zirckel DEF nicht berühre, wird alſo bewieſen: Ziehe vorhero KML bleyrecht auff AC.

Indeme die ∠ HEM, KME zween rechte Winckeln ſeynd.
So wird HI = ſeyn, der LK. d. 28. 1.

Unterdeſſen berühret die Linie HI den Zirckel DEF bloß allein in einem Puncten, nemlich in E.

Folget darum, daß die andere Linie LK denſelben Zirckel gar nicht berühre, ſondern völlig auſſerhalb denſelben ſeye. (dann zwey Parallel-Linien niemahlen zuſammen ſtoſſen können) d. 34. def. 1.

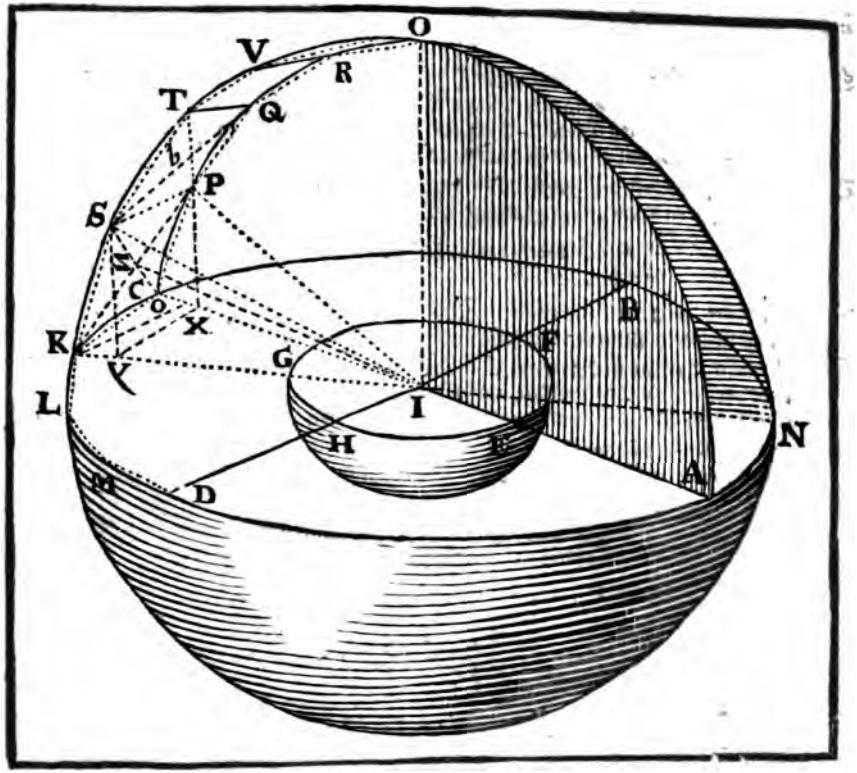
Dahero wird KC denſelben Zirckel noch weniger berühren können. (dann ſolche noch weiter, als LK, darvon abſtehet)

Auff ſolche Weiſe beweiſet man, daß auch die übrige Seiten deß Viel-Ecks (maſſen ſie der Seiten CK ⊓ ſeynd, und von dem Mittel-Punct G gleich weit abſtehen) den kleinern Zirckel nicht berühren. d. 14. 3.

Welches zu machen ware.

Folge.

Die Linie LK, ſo bleyrecht auff dem Diameter AC ſtehet, und die zwey Seiten deß Viel-Ecks (welche an dem Ende deß Diameters AC zuſammen ſtoſſen) zuſammen hanget, berühret den kleinern Zirckel niemahlen.



Die XVII. Vorgab. Handgriff.

Es seynd zwo Kugeln gegeben, welche auß einem Mittel-Punct beſchrieben ſeynd. Man verlanget in die gröſſere Kugel eine vielflächige Figur einzuſchreiben, welche die Fläche der kleinern Kugel nirgends berühre.

Es ſeynd gegeben die zwo Kugeln ABCD, EFGH, welche aus einem Mittel-Punct I beſchrieben ſeynd. Man begehrt in die gröſſere ABCD eine vielflächige Figur alſo einzuſchreiben, daß ſie auff keine Weiß die Fläche der gegebenen kleinern Kugel berühre.

Mercke, die zwey Kugeln ſeynd allhier nur halb ſchattirter angezeigt.

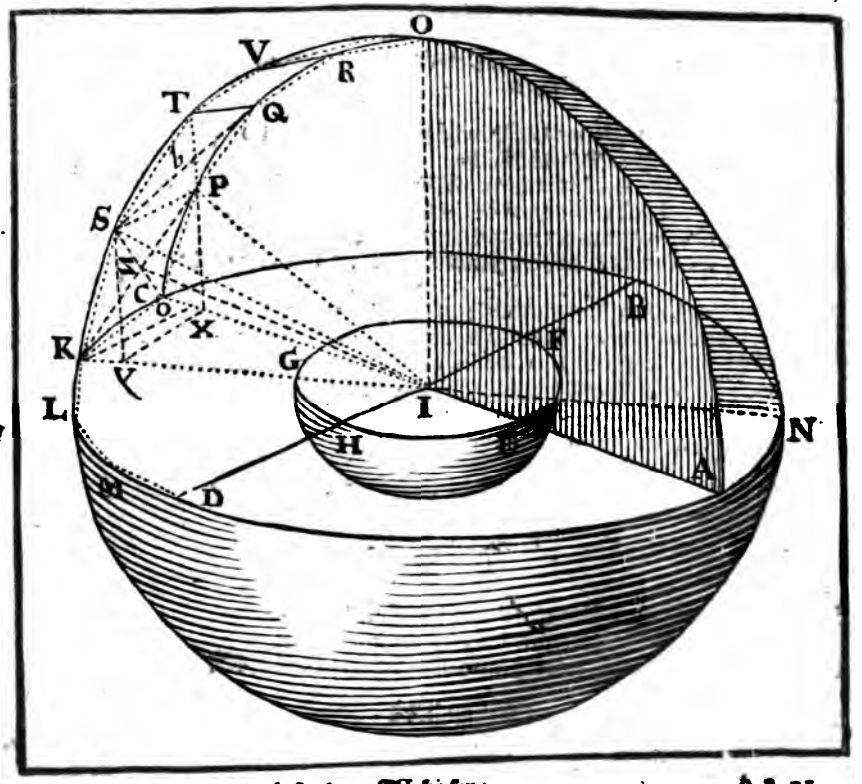
Handgriff.

Durchſchneide beyde Kugeln mit einer Fläche, welche durch dero Mittel-Punct I gehe, und die zween Zirckeln ABCD und EFGH mache.

Ziehe die Diametern AC, BD bleyrecht auff einander.
Einſchreibe alsdann in den gröſſern Zirckel ABCD das gleichſeitige Viel-Eck CKLMD u. ſ. f. welches den kleinern Zirckel EFGH nicht berühre. d. 16. 12.
Ziehe den Diameter KIN.
Aus I auff der Zirckel-Fläche ABCD, erhöhe die bleyrechte IO biß an die gröſſere Kugels-Fläche.
Nunmehro bilde dir ein, als wann durch IO, und durch die Diametern AC, KN die Fläche AOC, und KON (welche zwar hier nur halb angedeutet worden) gezogen wären.
Dieſe Fläche werden auch auff der Zirckels-Fläche ABCD bleyrecht ſtehen. d. 18. 11.
Indeme nun die halben Zirckeln AOC und KOM einander ⊓ ſeint, ſo werden auch deren Viertels-Bögen CO, und KO einander ⊓ ſeyn.
Stöhle dahero in die gleiche Viertels-Bögen CO, KO die gerade Linien CP, PQ, QR, RO und KS, ST, TV, VG, welche denen CK, KL, LM, MD an der Anzahl und Länge ⊓ ſeint. d. 1. 4.
Ziehe SP, TQ, VR zuſammen.
Auff dieſe Weiſe kan man mit denen übrigen Theilen umb die Kugel herum verfahren, ſo wird hernach die Vorgab verfertiget ſeyn.

Beweiß.

Laſſe vorhero auß denen Puncten P und S auff die Zirckels-Fläche ABCD die bleyrechte PX, SY herunter fallen.
Dieſe werden nothwendig in die gemeine Durchſchnitte AC, KN fallen müſſen. d. 38. 11.
Nunmehro, weilen in denen △ CXP und KYS
der ∠ PXC ⊓ iſt, dem ∠ SYK, } d. d. Zub. und 10. ax. 1.
Und auch der ∠ PCX ⊓ iſt, dem SKY, d. 27. 3.
(dann ſie in gleichen Umbkreiß Stücke PC, SK ſtehen)
Letztlich die Seiten CP ⊓ iſt, der Seiten KS. d. d. Hand.
So werden auch die zwo übrige Seiten PX und XC ⊓ ſeyn, denen zwo übrigen Seiten SY und YX. d. 26. 1.
Wann man dahero von denen gleichen IC, IK, die gleiche XC und YK abziehet,
So wird verbleiben IX ⊓, der IY. d. 3. ax. 1.
Deßwegen wird in dem △ CIK ſeyn IX, XC :: IY, YK d. 7. 5.
und folgends ſchlieſſet man, daß YX = ſeye, der KC. d. 2. 6.
Unterdeſſen, indeme PK ⊓ bewieſen worden iſt, der SY. d. d. Vorg.
Und darzu beyde auff einer Fläche ABCD bleyrecht ſtehen,
So wird PX = ſeyn, der SY, d. 6. 11.
Und auch SP =, und ⊓ der YX. d. 33. 1.
Und wiederumb SP wird = ſeyn, der KC. d. 9. 11.
Nun folget auß dieſem, daß die Vielſeitige Figur KSPC d. 7. 11.
auff einer Fläche allein, und auff dieſe Art auch die übrige vierſeitige Figuren TQPS, VRQT, und letztlich der △ RGV



ein jedes auff ſeiner beſondern Fläche ſeye. d. 2. 11.

Und alſofort kan man leichtlich beweiſen, daß die gantze Kugel ABCD mit der gleichen vier- und dreyſeitigen Figuren, von denen eine jede auff ſeiner beſondern Fläche lieget, umbſchloſſen ſeye, und dahero eine vielflächige Figur iſt eingeſchrieben worden.

Jetzund aber ſtehet zu beweiſen, daß gedachte Fläche den Umbkreiß der kleinern Kugel auff keine Weiſe berühren.

Ziehe vorhero auß dem Mittel-Punct I. die Linie IZ, bleyrecht in die vierſeitige Fläche KCPS. d. 11. 11.

Hernach hange ZP, ZC, ZS, ZK zuſammen.

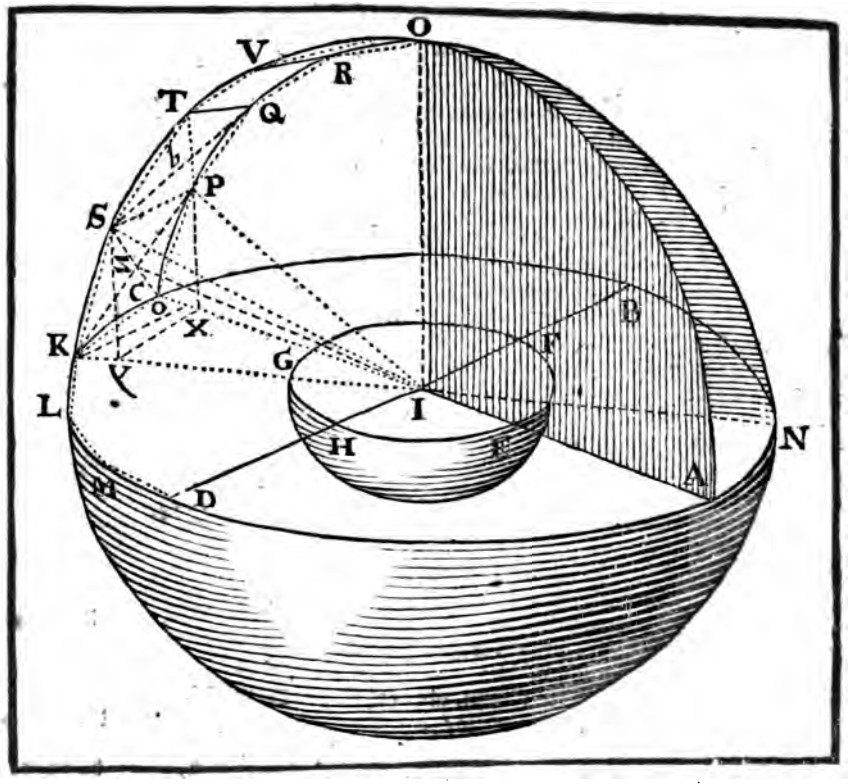
Letztlich ziehe auß K die Linie KO bleyrecht auff CA.

Dieſem nach iſt erſtlich klar, daß ſich verhalte IC, CK :: IX, XY. { d. 4. Cor. 2. 6. und d. Vor.
IC aber iſt ⊏, als IX (nemlich das gantze iſt ⊏ als ſein Theil.)

Dahero wird auch CK ⊏ ſeyn, als XY (oder die gleiche PS.) d. 14. 5.

Auff ſolche Weiſe iſt SP ⊏, als TQ, und TQ ⊏, als VR.

Entzwiſchen, weilen IZP, IZC, IZK, IZS vier rechte ∠ ſeynd gemacht worden,
Und die Seiten IC, IP, IS, IK einander ⊓ ſeynd, und die Seiten IZ allen vier △ gemein iſt. d. 15. def. 1.
So folget, daß ZP, ZC, ZK, ZS auch einander ⊓ ſeynd. [d. 47. 1.
Dahero, wann man auß Z mit der Weite ZP einen Zirckel [d. 4. an. 46. 1.
ſchreibet, wird ſolcher nothwendig durch die andere drey Puncten C, K, S, gehen, und hierdurch die vierſeitige Figur SPCK umbſchreiben müſſen. d. def. 15. 1. d. 3. def. 4.
Wann nun in ſolchem Zirckel alle vier Seiten SP, PC, CK, KG der umbſchriebenen vierſeitigen Figur einander ⊓ wären:
So müſten auch die Bögen, welche von gedachten vier Seiten unterſpannet werden, einander ⊓ ſeyn. d. 28. 3.
Und dahero eine jede Seiten juſt einen Viertels-Bogen von dem gantzen Umbkreiß unterſpannen.
Indeme aber KC ⌜ iſt bewieſen worden, als SP. d. d. Vor.
ſo wird dann dieſelbe KC mehr als ein Viertels-Bogen unterſpannen.
Unterdeſſen verhalten ſich die ∠ in denen Zirckeln gegen einander,
Gleich wie ihre Umbkreiß-Stücke, darauff ſie ſtehen. d. 33. 6.
Nun iſt das Umbkreiß-Stück KC allererſt bewieſen worden ⌜, als ein Viertels-Bogen, welcher allezeit einen geraden ∠ beſchlieſſet.
Dahero folget, daß alſo KG dem ſtumpffen ∠ CZK mache,
Und darum wird das □ auff KC ⌜ ſeyn, als beyde □ auff ZC und ZK ſammentlich. d. 12. 2.
Die beyden □ aber auff ZC und ZK wegen gleichen Seiten ſeint auch einander gleich.
Deßwegen wird das □ auff KC ⌜ ſeyn, als doppelt das □ auff ZC.
Ferner iſt der ∠ AIK ⌜, als ein rechter ∠. d. 9. ax. 1.
(Dann der ∠ AID ein rechter ∠ gemacht worden iſt)
Dieſem ∠ AIK aber ſeint ⊓ beyde ∠ IKC, und IKC ſammentlich, d. 32. 1.
(welche ſonſten unter ſich ſelbſt einander ⊓ ſeint). d. 5. 1.
Dahero wird die Helffte von beyden ∠, als wie der ∠ ICK ⌜ ſeyn, als ein halb rechter ∠.
Darumb wird in dem △ COK (maſſen der ∠ COI ein rechter ∠ iſt, und der ∠ ICK ⊀, als ein halbrechter ∠) der dritte ∠ CKO nothwendig ⌝ ſeyn, als der ∠ ICK, d. d. Zuß. d. 32. Cor. 1.
Und folgends die Linie Ko ⌜ ſeyn, als die Linie Co. d. 19. 1.
Dahero iſt klar, daß das □ auff KC (welches ſonſten ⊓ iſt, denen zwey □ auff Ko und Co) ⌝ ſeyn werde, als das □ auff der gröſſern Seiten Ko zweymahlen genommen.
Unterdeſſen iſt ſchon bewieſen worden, daß daſſelbe □ auff KC ⌜ ſeye, als das □ auff ZC zweymahlen genommen.
Dahero wird das □ auff Ko einmahlen genommen, auch ⌜ ſeyn, als das □ auff ZC, auch einmahlen genommen.
Dieſem nach, weilen das □ auff IC ⊓ iſt, denen zwey □ auff IZ und ZC. d. 47. 1.



Und auch das □ auff IK ⌐ ist, denen zwey □ auff IO und KO. d. 47. 1.
wegen gleichen Seiten aber ist das □ auff IC ⌐, dem □ auff IK. d. 15. def. 1.
Dahero seynd auch die zwey □ auff IZ und ZC ⌐, denen zwey □
auff Io und Kó.
Wann man nun beyderseits die zwey ungleiche □, nemlich das
kleinere □ auff ZC, und das gröſſere □ auff Ko von denen
gleichen □ auff IC und IK abziehet.
So ist klar, daß das übrige □ auff IZ ⌜ seyn werde, als das
übrige □ auff IO. d. 5. ax. 1.
Und folgends wird auch die Linie IZ ⌜ seyn, als die Linie Io. d. 4. an. 46. 1.
Unterdessen ist der Punct o (das ist die Linie Ko) ausserhalb
der Kugel EFGH, und kan dieselbe nicht berühren. d. 16. Cor. 12.
Folget, daß noch vielweniger die Fläche KSPC, worauff Z
der nechste Punct gegen den Mittels-Punct I ist, gedachte
kleinere Kugel EFGH berühren werde. u. s. f.
Eben auff diese Weise beweiset man, daß die Fläche STQP,
TVRQ, VOR die Kugel nicht EFGH berühren können, u. s. f.

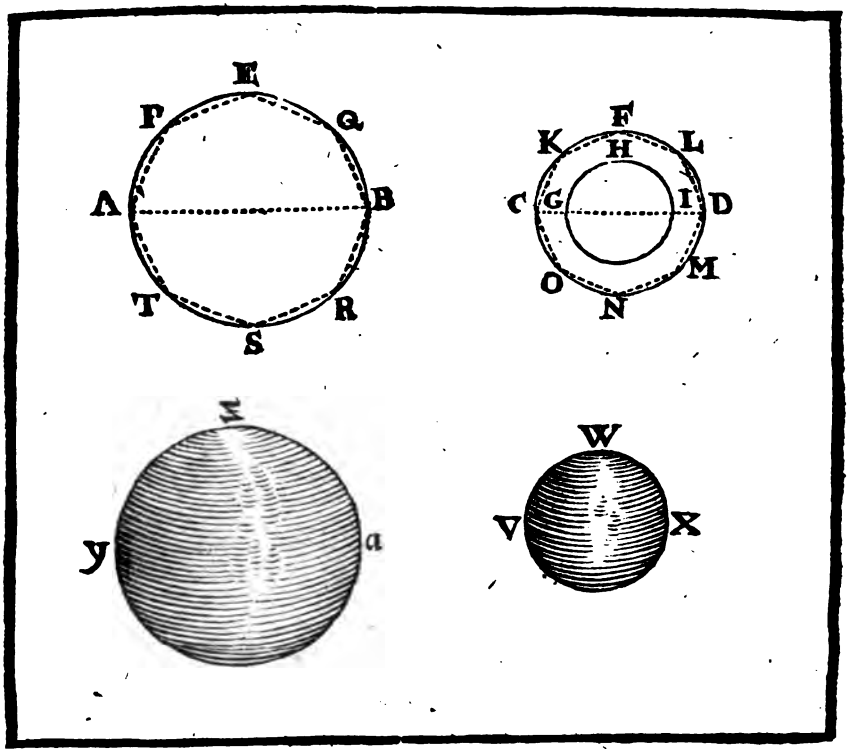
Dahero iſt die vielflächige Figur ORV, TQPS, u. ſ. f. welche die kleinere Kugel nicht berühret, in die Kugel ABCD eingeſchrieben worden.
Welches zu machen ware.

Folge

Wann in einer andern Kugel auch eine vielflächige Figur, gleichförmig der erſt eingeſchriebenen vielflächigen Figur, eingeſchrieben wird: ſo wird ſich eine vielflächige eingeſchriebene Figur, zu der andern gleichförmig eingeſchriebenen vielflächigen Figur in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche der einen Diameter, zu dem Diameter der andern hat, verhalten.

Dann klar iſt, wann beyde Kugeln umb einen Punct geſtöhlt werden, (wie vorgehends geſchehen iſt) daß ſie wegen einerley einfallenden geraden Linien, und gleicher Außtheilung, in gleichformige, und an der Anzahl gleichen Spitzſäule (als wie in der gröſten Kugel die Spitzſäule KSPCI, deſſen Baſis KSPC und der Spitze I iſt) abgetheilt werden.

Nun verhalten ſich gleichförmige Spitzſäule gegen einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer gleichförmig-haltnuß-ſagenden Seiten (nemlich deren halb-Diametern CI, GI d. Cor. 8. Porg. 12): das iſt, die gröſſere Spitzſäule KSPCI verhaltet ſich gegen der kleinern gleichförmigen Spitzſäule in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche der gröſſere halb-Diameter CI, zu dem kleinern halb-Diameter GI hat. u. ſ. f. Eine gröſſere Spitzſäule zu einer kleinern Spitzſäule, ſo viel deren in beyden Kugeln ſeynd; wie aber eine gröſſere Spitzſäule ſich zu einer kleinern Spitzſäule verhaltet: alſo werden ſich alle gröſſere Spitzſäule ſammentlich in einer Kugel (das iſt, die gantze gröſſere dichte vielflächige Figur) zu allen kleinern Spitzſäulen ſammentlich in der andern Kugel (das iſt, zu der gantzen kleinern dichten vielflächigen Figur) verhalten (d. 12. ſ.) und dahero ſich auch die gröſſere vielflächige Figur, zu der kleineren gleichförmig vielflächigen Figur in dreymahliger Verhaltnuß ihrer halb oder gantzen Diametern (d. 15. ſ.) verhaltet.



Die XVIII. Vorgab. Betrachtung.

Die Kugeln verhalten ſich gege einander in dreymahliger Verhaltnuß ihrer Diametern.

Es ſeynd gegeben die zwo Kugeln AEB, CFD und ihrer Diametern AB, CD. Dieſem nach ſagt man, daß ſich die Kugel AEB, zu der Kugel CFD in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche der Diameter AB, zu dem Diameter CD hat, verhalte.

Beweiß.

Geſetzt, man geſtehe es nicht: ſo wird dannoch die Kugel AEB ſich zu einer andern Kugel, gleich wie zu GHI (welche ⅂ iſt, als die Kugel CFD), oder zu YZa (welche Γ iſt, als CFD) in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche der Diameter AB, zu dem Diameter CD hat, verhalten können.

Zulaſſe man anfänglich, daß die Kugel AEB ſich zu der Kugel GHI, (welche ⅂ ſeye, als die Kugel CFD) in dreymahliger Verhaltnuß derjenen, welche der Diameter AB, zu dem Diameter CD hat, verhalte.

Nunmehro bilde dir ein, daß die zwey Kugeln GHI und CFD aus einem Mittel-Punct gezogen ſeynd.

Alsdann einſchreibe in die gröſſere CFD die vielflächige Figur CKFLDMNQ, welche die kleinere Kugel GHI nicht berühre. d. 17. 12.

Letztlich in die Kugel AEB einſchreibe die vielflächige Figur APE QBRST gleichförmig, der vielflächigen Figur CKFLDMNQ.

Dieſem nach iſt klar, daß die gleichförmige eingeſchriebene vielflächige Figur APEQBRST in der Kugel AEB, ſich zu der eingeſchriebenen vielflächigen Figur in der Kugel CFD in dreymahliger Verhaltnuß ihrer Diametern AB, CD, verhalte. d. 17. Cor. 12.

Es iſt aber zugelaſſen worden, daß auch die Kugel AEB ſich zu der Kugel GHI in dreymahliger Verhaltnuß, deren Diametern AB, CD, verhalte:

Dahero wird ſich die Kugel AEB, zu der Kugel GHI verhalten: gleich wie die dichte vielflächige Figur APEQBRST, zu der dichten vielflächigen Figur CKFLDMNQ.

Und durch die Verwexlung, wird ſich die Kugel AEB zu der dichten vielflächigen Figur APEQBRST verhalten: gleichwie die Kugel GHI, zu der dichten vielflächigen Figur CKLDMNQ.

Unterdeſſen iſt die Kugel AEB ⅂, als die dichte vielflächige Figur APEQBRST, (nemlich das gantze iſt ⅂, als ſein Theil).

Folget, daß auch die Kugel GHI ⅂ ſeye, als die dichte vielflächige Figur CKFLDMNQ (der Theil ⅂ als ſein gantzes)

So ungereimt iſt.

Dahero ſchlieſſet man, daß die Kugel AEB ſich nicht zu einer andern Kugel, welche ⅂ iſt, als die Kugel CFD, in dreymahliger Verhaltnuß deren Diametern AB zu DC verhalte.